



Aspects géométriques des principes locaux-globaux dans la théorie abstraite des formes quadratiques

Eric Franck Idir Kebbab

► To cite this version:

Eric Franck Idir Kebbab. Aspects géométriques des principes locaux-globaux dans la théorie abstraite des formes quadratiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066047 . tel-00990237

HAL Id: tel-00990237

<https://theses.hal.science/tel-00990237>

Submitted on 13 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : *Mathématiques*

par

KEBBAB Eric, Franck, Idir

Sujet :

Aspects Géométriques des Principes Locaux-Globaux dans la Théorie Abstraite des Formes Quadratiques

Soutenue le *20 février 2014* devant la Commission d'examen :

M.	DICKMANN	MAX	(Directeur de thèse)
M.	ASTIER	VINCENT	
M.	COSTE	MICHEL	
Mme	GONDARD	DANIELLE	
M.	MIRAGLIA	FRANCISCO	
M.	RISLER	JEAN-JACQUES	

Rapporteurs :

M.	COSTE	Michel
M.	KNEBUSCH	Manfred



Thèse préparée au :

Département de Mathématiques de l'Université Paris VI

Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)

Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586)

Equipe Topologie et Géométrie Algébrique

4, Place Jussieu - 75 005 Paris (France)

Résumé

Les espaces d'ordres abstraits sont introduits pour la première fois par Murray Marshall, vers la fin des années 70, dans la perspective d'offrir un cadre abstrait pour l'étude des formes quadratiques dans un contexte généralisant celui des corps et des anneaux, contournant ainsi certaines considérations contraignantes telles la régularité, la caractéristique... Un équivalent algébrique de la notion d'espace d'ordres ne tarde pas à voir le jour. Vers le début des années 90, les travaux de Max Dickmann, joint par son élève Lira de Lima et par son collaborateur Francisco Miraglia, sur la possibilité d'axiomatiser les espaces d'ordres dans un langage élémentaire ont donné naissance à la théorie des groupes spéciaux (réduits). Les espaces d'ordres sont avérés donc des objets bipèdes, un pied topologique et l'autre algébrique, et ce qui est intéressant, c'est que ces deux théories duales, généralisent toutes les notions et propriétés des formes quadratiques classiques connues (isométrie, groupes des valeurs, représentation, l'isotropie, l'annulation de Witt, anneau de Witt ...). L'avantage qu'a cette théorie, multi-facettes, consiste d'une part l'existence d'une topologie très riche (celle des espaces d'ordres), et d'autre part la présence d'une structure de groupe et d'un langage élémentaire permettant de la contrôler.

Le premier thème auquel nous nous intéresserons dans cette Thèse consiste en la *caractérisation* des éléments (ordres) d'un espace d'ordres (voir les sections §4 et §5). Dans le cas des corps de fonctions des variétés réelles, nous reprendrons, en détails un résultat dû à Brumfiel, qui affirme l'existence d'une *correspondance bijective* entre les ordres d'un tel corps et une certaine famille d'*ultrafiltres* de l'algèbre de Boole des semi-algèbres de la variété. Pour établir ce lien, Brumfiel utilise la topologie des *semi-algèbres régulières*. Cette correspondance tend à traduire les *ordres* de ces corps par des *ultrafiltres*. Ce qui nous intéresse ici c'est de trouver une caractérisation simple et aisée à saisir intuitivement des ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Nous examinerons une autre caractérisation des ordres de ce corps, en introduisant la notion de *demi-branche de Bézout*, un type particulier de demi-branches planes dont la définition provient des propriétés de l'intersection des courbes algébriques planes ; nous tenterons ainsi d'apporter une contribution modeste permettant de mieux les comprendre.

Le second thème traite l'un des aspects de l'interaction algébrique-topologique qui régit la théorie des espaces d'ordres : *Les principes locaux-globaux généralisés*, un problème connu sous le nom de "*Conjecture pp*". Le premier résultat exposé dans la présente Thèse (voir section §7), et traitant de la conjecture *pp*, concerne deux principes locaux-globaux classiques, celui de la *séparation des constructibles*, prouvé dans [ABR] en utilisant des techniques élémentaires, et le principe de *principalité des basiques*, démontré par Marshall. Sans difficulté, nous montrerons que l'interprétation, dans le langage des groupes spéciaux, des propriétés de *séparation* et de *principalité*, en termes de *formule pp* (*positives-primitives*), nous offre une *vision claire et explicite* du fait que ces deux principes découlent trivialement d'un principe local-global plus général, dit *théorème d'isométrie étendu de Marshall*. Le deuxième (voir section §8) consiste en la généralisation du contre-exemple à la conjecture *pp*, dans le cas particulier de l'espace d'ordres du corps de fonctions de la *conique rationnelle* définie par l'équation $x^2 + y^2 = 3$. Nous montrons qu'il existe des *formules produits en tout rang* réfutant cette conjecture, en réadaptant les techniques utilisées par Marshall et Gładki (voir l'article [GM1] ainsi que la section §8 de cette Thèse). Le dernier résultat obtenu (voir sections §9 et §10) concerne cette fois-ci l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Nous nous intéresserons à des familles de polynômes vérifiant les conditions (10.15) et montrerons que toute formule *pp*, ayant ses paramètres dans une telle famille, vérifie le principe local-global dans l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Nous baptiserons ces formules, *formules V-universelles* (voir définition (10.1)). L'idée générale repose sur les éléments suivants : (1) Construire, à partir des paramètres \underline{A} d'une telle formule $\Phi(\underline{A})$, un sous-espace d'ordres (Y, H) de (X, G) , (2) choisir un point p , dit de contrôle, (3) remplacer certains facteurs (polynômes) des témoins de vérité sur (Y, H) de $\Phi(\underline{A})$ par des formes affines (droites passant par p) et enfin (4) appliquer un principe dit de *transmission de positivité*, découlant du principe de transfert. Nous clorons le dernier chapitre par proposer deux procédés de construction des formules *V-universelles*, le premier part d'un cercle et d'une distribution de points vérifiant une certaine configuration géométrico-combinatoire et le second utilise un type particulier d'étoiles ayant un nombre impair de *branches*.

Mots-clefs : Corps formellement réels, formes quadratiques, principe de Transfert, espaces d'ordres, groupes spéciaux, conjecture *pp*, formules *V-universelles*.

Remerciements

En préambule, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui m'ont apporté aide et soutien, matériel, technique ou moral et qui ont contribué à l'élaboration de cette Thèse, fruit de tant d'années de sacrifice, de persévérance et de combat, mais aussi de plaisir, de partage et d'émotion intense, des années qui n'étaient que lumière et durant lesquelles j'ai appris à pratiquer l'art des arts, le *graal* des sciences : *Les Mathématiques*.

En tout premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de Thèse, le professeur Max Dickmann, pour sa disponibilité, sa passion communicative, son ouverture d'esprit et sa gentillesse, sans qui, rien n'aurait vu le jour. Il a dirigé mon travail dans la continuité et le bon sens. Tout au long de ces années, il a su me guider dans cet apprentissage de la recherche en *remotivant* l'étudiant que je suis, dans les moments de doute et de difficulté, me faisant découvrir quelques uns des coins des Mathématiques qui me paraissaient pourtant si éloignés de ma formation de géomètre. Avec lui, j'ai découvert la Géométrie algébrique réelle, alors que je ne connaissais que quelques brins de notions sur les variétés réelles, la théorie des espaces d'ordres et sa jumelle des groupes spéciaux, une théorie sur laquelle j'ai posé les deux pieds afin de comprendre la cause de l'effet et à quoi j'ai consacré la totalité de la présente Thèse, il m'a aussi initié aux valuations, à l'algèbre réelle, à la logique, en me faisant découvrir l'utilité des langages élémentaires et la théorie des modèles, grâce à quoi *l'effervescence de l'idée calme l'agitation du sens*. Toutes ces années de préparation de cette Thèse ont été très enrichissantes, tant sur le plan technique mathématique, que sur le plan humain et social.

J'exprime ma profonde gratitude aux professeurs Fabrizio Broglia ainsi qu'à son épouse Francesca Acquistapace, qui m'ont accueilli avec un cœur grand comme tout, en me faisant bénéficier d'une bourse européenne me permettant d'effectuer un séjour en tant que "*visiting doctor*", entre Février et Juillet 2008, à l'université de Pise, en Italie. Je reconnais en eux la générosité, l'hospitalité et la gentillesse. Ils ont été très soucieux et attentionnés à mon égard. Je remercie également le professeur Berarducci, qui a accepté de superviser mon travail et m'a offert des moments très précieux pour lui exposer certains points de mon travail, notamment sur la généralisation des contre-exemples à la conjecture *pp* de Marshall ainsi que la construction d'une famille de formules *pp* vérifiant la conjecture *pp* dans le cas particulier de l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$.

J'adresse un salut amical à tous mes amis italiens avec qui j'ai passé d'agréables moments de complicité, dans la joie, le bonheur et la bonne humeur. Grâce à eux, j'ai pu découvrir des endroits extraordinaires où vie, amour et science sont indiscernables. Mes amitiés vont à : Demba, Francesca, Anna, Maria, Lorenzo, Diakité, Giuliano ... et tous ceux que je n'ai pas cités, la liste est encore longue, et pour ne pas m'arrêter là, je tiens à remercier tous les membres (personnel, professeurs et étudiants) du département de Mathématiques de l'université de Pise, qui m'ont aidé à passer un séjour inoubliable en Italie.

J'adresse mes remerciements au professeur Jean-Jaques Risler. J'ai eu l'occasion de le connaître lorsqu'il a dirigé mon mémoire de Master à l'UPMC, et c'est grâce à lui que j'ai rencontré mon directeur de Thèse. Ses travaux sur la géométrie algébrique réelle continuent à être des références incontournables dans ma formation et l'élaboration de cette Thèse.

Je n'ai pas eu l'occasion de discuter longuement avec eux, mais les quelques échanges que j'ai eus, en tête-à-tête ou par email, avec les professeurs Alonso et Ruiz m'ont été très bénéfiques et m'ont permis d'avancer considérablement dans certaines parties de mon travail, notamment sur les sections §4 et §5 (caractérisation des ordres de $\mathbb{R}(x, y)$) en termes d'ultrafiltres et de demi-branches analytiques. Je leur suis infiniment reconnaissant.

Ma reconnaissance va également à Pawel Gładki, que j'ai eu la chance de rencontrer lors d'un de ses exposés à l'IMJ (Paris 7) portant sur la caractérisation des structures quotients des espaces d'ordres. Je partage avec lui un point de nature technique ; on a travaillé tous les deux sur la conjecture *pp*.

Mes collègues et amis à l'UPMC sont très nombreux. Certains sont toujours à Paris 6, mais beaucoup l'ont quitté. Je salue mes amis : Nabil, Hakim, Alexandre, Thomas, Mehdi, Clément, Julien, Aurélien, Moustapha, Mani, Mounir, Leila, Erwan ... là encore, la liste est une suite infinie convergente vers sa limite : l'Amitié.

Je ne souhaiterai pas les décevoir, en oubliant mes collègues des collèges Lavoisier, Vincent d'Indy, Roland Dorgelès et ceux du collège Aimé Césaire, avec qui j'ai passé des années pleines d'émotions, d'échanges, de blagues, de complicité, de respect, de travail acharné et de combat afin que nos élèves vivent une scolarité mémorable, agréable et comblée. Entre deux cours et deux salles, les quelques minutes qui nous sont offertes pour se préparer à ce que la journée nous réserve, ont toujours été exploitées pleinement dans la construction et consolidation de notre amitié.

Le souvenir que je garde de ces collègues est un mélange de regards complices, d'enthousiasme, de sérieux, de joie et parfois de tristesse, de blagues, d'anecdotes, de petites histoires, d'esprit combatif, de petits *bonjour* et *bonsoir*, et de petits *merci* que m'ont servi, sans modération, mes élèves. Je souhaite à chacun la réussite au sens le plus large.

Je n'oublierai pas mes amis, même si le mot *Mathématiques* effraye plus d'un, ils ont su inscrire notre amitié sur les murs de la mémoire éternelle, et n'en manquent pas de demander, à la moindre occasion et en ce moquant avec le sourire, "*Et le Million de la fondation Clay, tu l'as ou on doit encore attendre ? !*". Nos RDV et nos appels m'ont permis de conserver un équilibre stable entre ma vie universitaire et ma vie personnelle, en dehors des formules et des schémas. Je pense à Taeko, Alim, Brahim, Mezri, Kamel, Abel, Cyril, Bruno, Fred, Madjid, Hocine, Gaëlle, Samira, Sarah, cousine Coco, Mouss, Kader, et pour être sûr de ne pas oublier personne, je te remercie, toi qui lis au moins cette page.

Enfin, je remercie profondément et sincèrement ma famille. Merci maman, la plus douce et respectable de toutes les mamans du monde, merci papa, toi qui a su me donner courage et alimenter ma force combative pour affronter la dureté de la vie. Merci à mes trois petits frères chouchous, Yougourthène, Amnay et Awris ainsi qu'à la dernière adorable Ania, je leur souhaite la réussite dans leurs projets. Je remercie également mes deux grands-mères, Tawes et Jejiga qui ont toujours été à mes côtés pour me protéger et me défendre. Je vous souhaite santé et longue vie. Un merci de mémoire va à mes deux grands-pères, qui m'ont inculqué les valeurs morales et de bonne conduite. Que Dieu vous accorde une place dans son vaste Paradis. Je remercie également tous mes proches, cousins et cousines, oncles et tantes ..., petits et grands. Que paix vous accompagne tout au long de votre vie.

JE DÉDIE CETTE THÈSE À LA MÉMOIRE DU REGRETTÉ MON AMI BILLY, L'ARTISTE
COMME ON LE SURNOMMAIT, À QUI JE RENDS HOMMAGE. J'ESPÈRE QUE LE MONDE
ENTIER SE SOUVIENDRA TOUJOURS DE TOI ET DE TON TALENT.

Introduction

Avant propos

Initiée par E. Artin, vers la fin des années 20, et axiomatisée par M. Marshall dans les années 70, la théorie des espaces d'ordres, produit presque accidentel, découlant de l'étude des corps réels, objets chers à Artin, est développée initialement pour fournir les outils nécessaires à la résolution du 17^{ème} problème de Hilbert, mais les diverses applications et interactions inattendues de cette théorie et ses impacts sur les différents domaines Mathématiques ont fait de celle-ci un moyen de connexion indispensable entre beaucoup de branches des Mathématiques, comme par exemple la Géométrie Algébrique Réelle, Algèbre Réelle, Théorie des Spectres Réels, Théorie des Valuations, Théorie des Modèles et Logique Mathématique, Les Structures Ordonnées, Théorie des Nombres, Formes Quadratiques, Théorie des Filtres et Ultrafiltres ...

Notre travail de recherche, dans le cadre de la présente Thèse, porte sur deux aspects de la théorie des espaces d'ordres, plus précisément de sa version *abstraite*, le terrain de culture de M. Marshall, qui sont, d'une part, l'étude d'une sorte de Principe Local-Global généralisé, englobant tous les principes classiques connus jusqu'à lors, comme celui de l'*Isométrie*, le principe local-global de l'*Isotropie* et sa version *étendue*, le principe de *Représentation* des formes quadratiques, le principe de *Séparations des constructibles*...; d'autre part, la compréhension de la structure *microscopique* des espaces d'ordres; car comprendre à quoi ressemblent les points d'un espace d'ordres abstrait en général, ou même dans le cas classique (espace d'ordres d'un corps formellement réel), et trouver un moyen, de plus ou moins universel, de les caractériser en termes d'objets mathématiques plus intuitifs et facilement maniabiles et calculables, constitue un défi de taille auquel on ne dispose d'aucune *moyen formel* permettant de le faire. Néanmoins, dans certaines situations, on peut apporter des réponses, même partielles, à cette question, tel est le cas par exemple de la *correspondance de Brumfiel* (voir [Bru]), qui établit une passerelle entre les ordres d'un corps de fonctions d'une variété algébrique réelle et les ultrafiltres (de *rang maximal*) de l'algèbre de Boole des sous-ensembles semi-algébriques de la variété (utilisant une topologie particulière dite *topologie régulière*). Les travaux d'Alonso, Gamboa et Ruiz (voir [AGR1] et [AGR2]), qui traitent de la *centralité* des ordres sur les corps de fonctions de variétés réelles, une notion introduite par D. W. Dubois, viennent apporter à la correspondance de Brumfiel un élément de clarification permettant de mieux conceptualiser la notion d'ordre dans ce cas.

Note

Les résultats qui constituent le cœur de la présente Thèse se trouvent essentiellement dans les sections §4, §5, §7, §8, §9 et §10, les résultats nouveaux sont dans les sections §8, §9 et §10, qui constituent le noyau de cette Thèse, et c'est sur celles-ci que nous souhaitons orienter l'attention du lecteur familier avec les concepts d'espaces d'ordres et de conjecture *pp*. Pour le public spécialiste des théories des corps réels, des espaces d'ordres et des groupes spéciaux, la lecture des sections restantes est recommandée, ne ce soit-ce que pour se familiariser avec les notations utilisées.

Contenu de la Thèse

Première partie :

La première partie est composée de trois sections.

Nous commencerons d'abord par un survol bref de la théorie des *corps ordonnés* en rappelant les notions fondamentales telles celles de cône positif (définition 1.1), de préordre (définition 1.6) et d'ordre (fait 1.3), qui sont à l'origine de la théorie des espaces d'ordres, en passant par les notions de corps formellement réel (définition 1.17) et de corps réel clos (définition 1.21), en rappelant quelques uns des résultats basiques de cette théorie, comme le théorème de caractérisation (1.22) et celui de l'existence de la clôture réelle d'un corps ordonné (1.23). Le paragraphe #1.4 contient l'un des résultats fondamentaux de la théorie des corps réels clos, le *Principe de Transfert*, le théorème d'*Elimination des Quantificateurs* et celui de *Complétude*.

Quant à la section §2, les *espaces d'ordres abstraits* sont au cœur du sujet. Le paragraphe #2.1 réunit les ingrédients nécessaires à la présentation de la théorie. Les notions de pré-espace d'ordres (définition 2.1), de forme, signature, isométrie, représentation et celle d'ensemble de valeurs y sont rappelées. Les axiomes des espaces d'ordres sont donnés aux définitions (2.1) et (2.4). L'exemple incontournable d'espace d'ordres est celui de l'espace des ordres d'un corps formellement réel (exemple 2.6). La structure topologique d'un espace d'ordres est examinée au paragraphe #2.2. Le paragraphe #2.3 est consacré aux sous-structures des espaces d'ordres, qui sont elles-mêmes des espaces d'ordres (théorème 2.14). Dans le paragraphe #2.5, deux théorèmes de caractérisation des sous-espaces sont prouvés (théorème 2.22) et (théorème 2.25). On clot la section par rappeler quelques notions comme celles d'éventail (paragraphe #2.4), opérations sur les espaces d'ordres (paragraphe #2.6), composantes connexes (paragraphe #2.7), indice de stabilité (définition 2.54), espaces vérifiant la propriété d'approximation forte (SAP) (proposition 2.52) ainsi que la notion de longueur de chaîne qui aboutit à la définition des espaces de type fini (définition 2.56).

La troisième et dernière section de la partie aborde le thème des *groupes spéciaux (réduits)*, qui sont des groupes multiplicatifs d'exposant 2, munis d'un élément distingué noté -1 , différent de l'unité (dans le cas réduit) ainsi qu'une relation quaternaire dite l'*isométrie des 2-formes*. Un système d'axiomes est rappelé à la définition (3.4). L'isométrie des n -formes est définie récursivement à partir de l'isométrie des 2-formes (définition 3.7). L'équivalent de la notion de sous-espace d'ordres dans la théorie des groupes spéciaux est celle de quotient par un *sous-groupe saturé* (définition 3.10). La définition (3.20) introduit la notion de morphisme de groupes spéciaux, qui est à la base de la *dualité* entre espaces d'ordres abstraits et groupes spéciaux réduits. Le résultat principal de cette section est contenu dans le paragraphe #3.5, qui établit un isomorphisme (contravariant) de catégories entre les espaces d'ordres abstraits et les groupes spéciaux réduits (théorème de dualité 3.44). On clot la section, donc la partie, par un résultat issu de la théorie des valuations, le théorème de Baer-Krull (3.49), qui établit un lien entre les valuations d'un corps formellement réel et ses ordres, via la notion de *compatibilité* (définition 3.46).

Deuxième partie :

Les deux sections de la seconde partie de cette Thèse seront consacrées à la caractérisation et à la compréhension des éléments (ordres) d'un espace d'ordres. Nous nous intéresserons exclusivement au cas des ordres du corps de fonctions d'une variété algébrique réelle, en particulier ceux du corps $\mathbb{R}(x, y)$.

La section §4 reprend un résultat connu, attribué à Brumfiel, que nous baptiserons *cor-*

respondance de Brumfiel, qui met en évidence un lien entre la théorie des *ultrafiltres* et celle des ordres. Pour faciliter l'accès au lecteur, nous ferons un bref rappel sur les notions de filtre, préfiltre et d'ultrafiltre (définition 4.1), (définition 4.5) et (définition 4.7). L'exemple (4.11) constitue l'exemple phare (en dimension 1), pour la compréhension de cette correspondance. Dans la seconde partie de cette section seront définies les notions de *topologie semi-algébrique* (définition 4.13) et (proposition 4.14), celle de *topologie régulière* (définition 4.17) ainsi que celle de *rang* d'un (ultra)filtre (définition 4.27). Les ultrafiltres de rang maximal seront au cœur de cette correspondance, et la proposition (4.29) donne une caractérisation de ces objets. Les ouverts basiques ont une propriété (lemme 4.23), propre aux *ouverts réguliers*, que n'ont pas les ouverts semi-algébriques en général, comme l'illustre le contre-exemple (4.26). Le théorème principal de cette section (théorème 4.32) stipule qu'il existe une correspondance bijective entre les ultrafiltres de rang maximal d'une variété algébrique réelle et les ordres de son corps de fonctions. Le *théorème de Transfert* (4.36), établi pour les variétés algébriques réelles, joue un rôle crucial dans cette correspondance. Pour démontrer la théorème (4.32), nous construirons deux applications (proposition 4.38) et (proposition 4.40) qui échangent bijectivement les filtres de rang maximal d'une variété algébrique réelle et les ordres partiels de son corps de fonctions. La correspondance de Brumfiel entre *ordres* et *ultrafiltres* n'est donc qu'une conséquence de ce résultat.

L'autre caractérisation des ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$, auquel est orienté notre intérêt découle des propriétés géométrico-analytiques de ces ordres. La clé de cette *quasi*-correspondance réside dans le comportement semi-local de ces ordres que nous interpréterons comme une forme d'*adjacence* (ou *compatibilité*) à un certain type de courbes ; pour être précis, on parlera de *demi-branches*. Dans la section §5, les notions de *demi-branche* et d'*équivalence* topologiques seront évoquées (définition 5.3) et (définition 5.8). La notion de demi-branche sera raffinée via les concepts de *demi-branche algébrique signée* (définition 5.21), définie comme un morceau d'une courbe algébrique adjoint à un ensemble d'ouverts semi-algébriques que nous avons appelé *drapeaux* (définition 5.19), et de *demi-branche pseudo-algébrique* (définition 5.29), qui elle, n'est pas supportée sur une courbe algébrique mais possède localement la *propriété de Bézout* (finitude des points d'intersection avec les courbes algébriques). En raffinant davantage et en introduisant la notion de *congruence algébrique* de ces demi-branches (définition 5.33), nous aboutirons à la notion de *demi-branche de Bézout* (définition 5.37). Nous affirmons dans le théorème (5.39), qu'à toute demi-branche de Bézout, on peut associer d'une manière unique un ultrafiltre de rang maximal de l'algèbre de Boole des semi-algébriques de la variété \mathbb{R}^2 (plan réel affine). Cette application est injective par construction, mais la question de sa surjectivité n'est pas évoquée, vu son caractère très complexe ! Le dernier paragraphe #5.7, de cette section traitera des éventails de 4-éléments de l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Les demi-branches de Bézout nous offrent une meilleure visibilité de ces objets.

Troisième partie :

Cette partie est composée de trois sections.

Dans la section §6, nous rappellerons les origines de la conjecture *pp*, à travers le *langage élémentaire des groupes spéciaux*. Le paragraphe #6.1.1 contient quelques éléments de base de la théorie des modèles, comme par exemple les langages élémentaires, dits aussi langages de premier ordre, les formules et énoncés, notion d'interprétation d'une formule ... Un type particulier de formules nous intéressera ici, les formules *pp* (*positives-primitives*) (définition 6.3). La conjecture *pp* sera formulée dans (conjecture 6.10). Deux aspects de cette conjecture nous intéressent, (question 6.12) et (question 6.13). Le dernier paragraphe de cette section constituera un cocktail de résultats connus, notamment quelques cas où la conjecture *pp* reçoit une réponse positive, ainsi que des contre-exemples, les espaces d'ordres des corps des coniques

rationnelles et l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$, cas auxquels nous nous intéresserons par la suite.

La section §7 ne contient pas de résultats majeurs, sauf peut-être le fait de *mettre au clair* l'utilité du langage des groupes spéciaux et la possibilité de formuler les propriétés (topologiques) d'un espace d'ordres en termes de formules *pp*. Nous reprendrons ici deux principes locaux-globaux classiques, et reformulerons les propriétés qui les décrivent à l'aide de la relation de représentation par les formes et constaterons que les énoncés associés sont des cas particuliers du théorème étendu de l'isotropie (théorème 7.3). Les théorèmes principaux de cette section sont (théorème 7.9) et (théorème 7.14). Nous montrerons également que si l'on sort du cadre des constructibles, le théorème (7.9) n'est plus valable, en fournissant un contre-exemple (exemple 7.12).

Dans la section §8, nous développons une approche combinatoire permettant de généraliser les contre-exemples donnés à la conjecture *pp* par Marshall et Gładki (voir [GM1] et [GM2]), dans le cas particulier de l'espace d'ordres de la conique rationnelle définie, sur le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} , par l'équation $x^2 + y^2 = 3$. Cette courbe est connue pour être sans points rationnels (à coordonnées rationnelles) et son anneau de fonctions régulières est principal. Toutes ces propriétés, et bien d'autres, seront rappelées au paragraphe #8.1. Dans ce même paragraphe, nous définirons la notion de *formule produit de rang* $n \in \mathbb{N}$ (définition 8.1). Le second paragraphe #8.2 contient le résultat principal de cette section (théorème 8.23), ainsi que les ingrédients permettant d'établir ce théorème. Le dernier paragraphe #8.3 sera consacré à la preuve du théorème (8.23). La démarche utilisée ici est inspirée de celle de [GM1]. Le principe de travail consiste en la construction d'une formule *pp* vérifiée localement (mais pas globalement) sur l'espace d'ordres du corps de la conique $x^2 + y^2 = 3$, en faisant un test sur un nombre fini de sous-espaces finis. Un calcul sur le nombre de changements de signe de deux témoins de la forme construite, si l'on suppose leur existence, conduit à une contradiction (sur la parité de ce nombre).

Quatrième partie :

La dernière partie contient deux sections. Elle constitue le cœur de cette Thèse.

Dans la section §9 seront introduites les notions de (*demi*-)cône généralisé (définition 9.8) et celle de cône exclusif (définition 9.10), dans le contexte particulier de la variété réelle affine \mathbb{R}^2 (plan réel). Un cône généralisé engendré par deux ensembles (non vides et disjoints) est défini comme étant la réunion des droites (ab) , où a et b sont des points parcourant respectivement les ensembles A et B . La proposition (9.14) donne une condition suffisante de *fermeture* d'un tel cône généralisé. Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple (9.16). La proposition (9.19), quant à elle, fournit une caractérisation des cônes généralisés (dans le cas où A et B sont connexes). Le paragraphe #9.2.4 est consacré à la *propriété* des cônes généralisés.

Le résultat majeur de cette Thèse est contenu dans la dernière section (section §10). Les seuls résultats, connus jusqu'à lors, donnant une réponse affirmative à la conjecture *pp* se trouvent dans [Mar14] et [DMM]. Le premier article propose un procédé de construction d'une famille de formules *pp*, dites "*product-free and one related*" (*PF1R*), vérifiant le principe local-global dans tout espace d'ordres abstrait, et le second prouve que la conjecture *pp* est valide dans le cas de l'espace d'ordres du corps $\mathbb{Q}(x)$, qui, rappelons-le, est d'indice de stabilité 2. Dans le cas des espaces d'ordres de corps de coniques rationnelles (sans points rationnels) et celui de l'espace du corps $\mathbb{R}(x, y)$, la conjecture *pp* n'est plus valide (voir [GM1] et [GM2]). Une question s'est naturellement imposée : *Existe-t-il d'autres formules pp que les formules PF1R vérifiant le principe local-global dans ces deux derniers cas ?* Dans cette section sera traité le cas de l'espace (X, G) du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Il sera démontré que sous les conditions (10.15), sur les paramètres

d'une formule pp , le principe local-global fonctionne. Le résultat démontré ici (théorème 10.17) est encore plus fort : Pour toute famille de polynômes de $\mathbb{R}[x, y]$ vérifiant ces conditions (on parlera de *famille V -universelle*), toute formule pp , ayant ses paramètres dans cette famille, vérifie le principe local-global dans l'espace d'ordres (X, G) . L'idée est la suivante : Étant donnée une telle famille de polynômes, dont la courbe donnée par l'annulation de leur produit vérifie les conditions de *non-singularité* et de *bien-dispersion* des composantes connexes, cela nous permet de construire un sous-espace d'ordres (Y, H) de l'espace (X, G) . Ce sous-espace vérifie la conjecture pp (proposition 10.11). Ce dernier servira de pont pour la validité locale-globale d'une formule pp à paramètres dans la famille des polynômes choisis. La condition de bien-dispersion nous permet de choisir un point, dit *de contrôle*, nous servant à construire un témoin de vérité dans (X, G) pour la formule pp en question, en modifiant la composition d'un témoin de vérité dans (Y, H) (choisi arbitrairement). La condition de non-singularité intervient dans cette construction. Le principe de Transfert sera appliqué pour *transmettre la positivité* des entrées des 2-formes composant les formules atomiques de la formule pp , d'un nombre fini d'ordres de (X, G) à l'espace (X, G) . Nous clorons la section, et donc la Thèse, par proposer deux procédés combinatoires de construction de familles V -universelles, dans l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$.

Table des matières

I	Préliminaires	1
1	Eléments de la théorie de Tarski-Artin-Schreier	2
1.1	Ordres et préordres sur les corps	2
1.2	Corps formellement réels	4
1.3	Corps réels clos	4
1.4	Principe de <i>Transfert</i> de Tarski-Seidenberg	5
2	Espaces d'Ordres Abstraits	7
2.1	Axiomatisation des espaces d'ordres	7
2.2	Topologie des espaces d'ordres	10
2.3	Sous-espaces	11
2.4	Eventails	11
2.5	Caractérisation des sous-espaces	12
2.6	Opérations sur les espaces d'ordres	15
2.7	Composantes connexes	17
2.8	Quelques invariants des espaces d'ordres	17
3	Groupes Speciaux Réduits	20
3.1	Axiomatisation des groupes spéciaux	20
3.2	Anneau de Witt d'un groupe spécial	22
3.3	Saturation, formes et quotients de Pfister	22
3.4	Morphismes de groupes spéciaux	24
3.5	Théorème de dualité	26
3.6	Théorème de Baer-Krull	28
II	Sur les ordres de $\mathbb{R}(x, y)$	31
4	Ordres et ultrafiltres : Correspondance de Brumfiel	32
4.1	Filtres et ultrafiltres : Généralités	32
4.2	Ordres et ultrafiltres : Cas des variétés algébriques réelles	35
5	Ordres et demi-branches	43
5.1	Espace projectif et projectifié d'un ensemble	43

5.2	Demi-branches et germes topologiques	43
5.3	Demi-Branches Algébriques Signées	46
5.4	Demi-Branches Pseudo-Algébriques	48
5.5	Demi-branches de Bézout	49
5.6	Correspondance : Demi-Branches de Bézout-Ultrafiltres-Ordres	50
5.7	Un mot sur les éventails de $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$	51
III Principes Locaux-Globaux et Conjecture pp		53
6	Formules pp et Conjecture pp	54
6.1	Généralités - Définitions	54
6.2	Evolution de la conjecture pp	57
7	Deux applications du théorème d'isotropie étendu	60
7.1	Théorème d'isotropie étendu	60
7.2	Principe local-global de séparation	61
7.3	Principe local-global de principalité	64
8	Contre-exemples combinatoires à la conjecture pp	66
8.1	Généralités et résultats préliminaires	66
8.2	Contre-exemples à la conjecture pp	71
8.3	Preuve du théorème principal	75
IV Conjecture pp pour $\mathbb{R}(x, y)$		81
9	Cônes plans généralisés	82
9.1	Quelques éléments de Géométrie euclidienne	82
9.2	Cône généralisé et cône exclusif	84
10	Sur certaines familles V-universelles	89
10.1	Familles et formules V -universelles	89
10.2	Notations et réduction du passage <i>local-global</i>	90
10.3	Théorème principal	92
10.4	Preuve du Théorème principal	93
10.5	Construction de familles V -universelles	120

Première partie

Préliminaires

Sommaire

1	Eléments de la théorie de Tarski-Artin-Schreier	2
1.1	Ordres et préordres sur les corps	2
1.2	Corps formellement réels	4
1.3	Corps réels clos	4
1.4	Principe de <i>Transfert</i> de Tarski-Seidenberg	5
1.4.1	Version modèle-théorique	5
1.4.2	Version géométrique	6
2	Espaces d'Ordres Abstraits	7
2.1	Axiomatisation des espaces d'ordres	7
2.2	Topologie des espaces d'ordres	10
2.3	Sous-espaces	11
2.4	Eventails	11
2.5	Caractérisation des sous-espaces	12
2.5.1	Exemples de sous-espaces d'ordres	15
2.6	Opérations sur les espaces d'ordres	15
2.6.1	Somme directe	15
2.6.2	Extension par un groupe d'exposant 2	16
2.7	Composantes connexes	17
2.8	Quelques invariants des espaces d'ordres	17
2.8.1	Indice de stabilité et Approximation forte (SAP)	17
2.8.2	Longueur de chaîne	19
3	Groupes Speciaux Réduits	20
3.1	Axiomatisation des groupes spéciaux	20
3.1.1	Langage des groupes spéciaux	20
3.1.2	Axiomes des groupes spéciaux	21
3.2	Anneau de Witt d'un groupe spécial	22
3.3	Saturation, formes et quotients de Pfister	22
3.3.1	Définitions et propriétés	22
3.3.2	Construction de sous-groupes saturés	24
3.4	Morphismes de groupes spéciaux	24
3.5	Théorème de dualité	26
3.6	Théorème de Baer-Krull	28

1 Eléments de la théorie de Tarski-Artin-Schreier

Mots-clés : Ordres et préordres, ordres partiels, corps formellement réels, corps réels clos, principe de Transfert, formules, élimination de quantificateurs, modèle-complétude, 17^{ème} problème de Hilbert.

Références : [Art], [AS], [BCR], [CK], [Hod]

Résumé

Cette section donne un bref aperçu des notions et résultats de base de la théorie des corps ordonnés et des corps réels-clos utilisés, explicitement ou implicitement, par la suite.

1.1 Ordres et préordres sur les corps

Pour toute la suite de ce paragraphe, $(k, +, \cdot, 0, 1)$ désigne un corps commutatif de caractéristique nulle.

Définition 1.1 (CÔNES POSITIFS SUR LES CORPS). Un sous-ensemble non vide $\sigma \subset k$ est dit un **cône positif** sur k s'il vérifie les propriétés suivantes :

(CP1) $\sigma + \sigma \subset \sigma$.

(CP2) $\sigma \cdot \sigma \subset \sigma$.

(CP3) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

(CP4) $\sigma \cup (-\sigma) = k$.

REMARQUE 1.2.

Un **ordre total** sur un corps est une relation binaire d'ordre total sur celui-ci, compatible avec ses opérations. Les cônes positifs et les ordres totaux sur un corps donné sont en correspondance bijective. Plus précisément, on a :

Fait 1.3 (CORRESPONDANCE : CÔNES POSITIFS - ORDRES).

- i) Si \leq est un ordre sur k , alors l'ensemble $\sigma_{\leq} := \{a \in k; 0 \leq a\}$ est un cône positif sur k .
- ii) Réciproquement, si σ est un cône positif sur k , alors la relation \leq_{σ} définie par :
 $\forall a, b \in k; a \leq_{\sigma} b \iff b - a \in \sigma$, est un ordre sur k .

REMARQUE 1.4.

Les applications, " $\sigma \mapsto \leq_{\sigma}$ " et " $\leq \mapsto \sigma_{\leq}$ " sont inverses l'une de l'autre. On donnera désormais le nom d'**ordre** à ces objets et prendra comme axiomes ceux de la définition (1.1), et désignera par le couple (k, σ) un corps muni d'un ordre, qu'on appellera un **corps ordonné**.

Exemples 1.5.

1. Le corps des nombres réels \mathbb{R} ainsi que celui des rationnels \mathbb{Q} sont naturellement ordonnés par l'ordre usuel. Les cônes positifs associés sont, respectivement, le sous-ensemble des carrés de \mathbb{R} et celui des sommes des carrés de \mathbb{Q} .
2. Les corps $\mathbb{R}(x)$ et $\mathbb{Q}(x)$ peuvent être ordonnés de plusieurs façons, contrairement à \mathbb{R} et \mathbb{Q} . Il existe, sur ces corps, un ordre spécial, dit **infinitésimal positif** en 0, rendant x positif et plus petit que n'importe quel élément positif de \mathbb{R} (ou de \mathbb{Q}), selon le cas, vu comme élément du corps en question.

Définition 1.6 (PRÉORDRES ET ORDRES PARTIELS). On définit un **préordre** sur k comme étant un sous-ensemble non vide $P \subset k$ vérifiant les propriétés :

(CP0) $k^2 \subset P$.

(CP1) $P + P \subset P$.

(CP2) $P \cdot P \subset P$.

Le préordre P est dit **propre** s'il est strictement inclus dans k , sinon il est dit **trivial**.
Un **ordre partiel** est un préordre vérifiant :

$$(\text{CP3}) \quad P \cap (-P) = \{0\}.$$

Fait 1.7. Si P est un préordre sur k , alors on a équivalence entre :

- i) P est propre.
- ii) $-1 \notin P$.

Définition 1.8 (EXTENSION DE PRÉORDRES). P, P' deux préordres (propres) sur k .
On dit que P' est une **extension** de P , ou que P' étend P , si $P \subset P'$.
L'ensemble de tous les préordres qui étendent un préordre donné P sera noté PO_P .

Exemples 1.9.

1. Soit k un corps. L'ensemble des sommes de carrés de k , qu'on note par $\sum k^2$, est un préordre de k . D'après le fait (1.7), $\sum k^2$ est propre si, et seulement si, -1 n'est pas une somme de carrés ; dans ce cas $\sum k^2$ est le plus petit préordre de k pour l'extension.
2. Il est clair que tout ordre est aussi un préordre propre, mais la réciproque est fausse.

Fait 1.10 (EXTENSION DES PRÉORDRES PAR DES ORDRES). Soit P un préordre propre de k qui n'est pas un ordre et $a \in k \setminus P$. Alors il existe un ordre σ , contenant P mais pas a .

Fait 1.11 (STABILITÉ PAR UNIONS DE CHAINES). Soit $(P_i)_{i \in I}$ une chaîne croissante par extension de préordres propres. Alors l'ensemble $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ est aussi un préordre propre.

Corollaire 1.12 (CARACTÉRISATION DES ORDRES). Pour tout préordre P de k :

- i) PO_P possède des éléments maximaux propres (pour l'extension).
On note l'ensemble de ces préordres maximaux étendant P par X_P .
- ii) Les éléments de X_P sont tous des ordres sur k .
- iii) Réciproquement, chaque ordre sur k qui est extension de P est un élément de X_P .

Corollaire 1.13. Soient $P \neq P'$ deux préordres propres de k . Alors $X_P \neq X_{P'}$.

Corollaire 1.14. Si $-1 \notin \sum k^2$, alors l'ensemble $PO_{\sum k^2}$ est non vide. Il est composé de tous les préordres de k , par conséquent l'ensemble $X_{\sum k^2}$ est celui de tous ses ordres.

DÉMONSTRATION. Les corollaires (1.12), (1.13) et (1.14) sont des conséquences des faits (1.7), (1.10) et (1.11).

NOTATIONS 1.15.

Au lieu de $X_{\sum k^2}$, on notera, pour toute la suite de cette Thèse, par X_k l'ensemble de tous les ordres du corps k , et pour tout préordre propre P de k , X_P désignera l'ensemble de tous les ordres de k étendant P .

Le lemme suivant, attribué à Artin, dit *de séparation*, est d'une importance capitale pour le développement de la théorie des espaces d'ordres sur les corps et il est à l'origine de la résolution du 17^e problème de Hilbert.

Lemme 1.16 (LEMME DE SÉPARATION D'ARTIN). Pour tout préordre propre P de k , on a :

$$P = \bigcap_{\sigma \in X_P} \sigma = \bigcap_{\sigma \in PO_P} \sigma$$

1.2 Corps formellement réels

Définition 1.17 (CORPS FORMELLEMENT RÉEL). Le corps k est dit **formellement réel** (ou ordonnable), s'il possède au moins un ordre, sinon il est dit **non réel**.

Théorème 1.18 (CARACTÉRISATION DES CORPS FORMELLEMENT RÉELS). *Sous les conditions mises sur k (commutatif et de caractéristique nulle), on a équivalence entre :*

- i) k est formellement réel, i.e., $X_k \neq \emptyset$.
- ii) $-1 \notin \Sigma k^2$.
- iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in k (i \in \{1, \dots, n\}); \Sigma i = 1^{i=n} a_i^2 = 0 \Rightarrow a_i = 0$.
- iv) $k \neq \Sigma k^2$.

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR]). Le point (iii) est dû à J.-P. Serre (voir [Ser1]).

REMARQUES 1.19.

1. Les définitions de préordre, d'ordre partiel et d'ordre données plus haut ne s'appliquent pas aux corps de caractéristique non nulle, par conséquent, le théorème (1.18) précédent n'est plus valable en caractéristique $p \neq 0$.
2. De ce théorème, la propriété " k **est ordonnable**" peut s'exprimer dans le langage de premier ordre des corps (voir point (iii) de (1.18)).

Exemples 1.20.

1. Les corps \mathbb{R} et \mathbb{Q} constituent les exemples types de corps formellement réels.

Dans les exemples qui suivent, R désigne un corps formellement réel quelconque.

2. Les corps des fractions rationnelles $R(x_1, \dots, x_n)$ sont formellement réels. Nous nous intéresserons plus particulièrement dans cette Thèse au traitement du cas $n = 2$.
3. Plus généralement, si V est une variété algébrique réelle (non vide) (une courbe, surface, ...), alors son corps de fonctions $R(V)$ est formellement réel.
4. Les corps des séries de Laurent $R((x_1, \dots, x_n))$ et ceux des séries de Laurent convergentes $R((x_1, \dots, x_n))_{conv}$ le sont aussi.
5. Les corps des séries réelles de Puiseux $R(\{x_1, \dots, x_n\})$ et ceux des séries de Puiseux algébriques sur $R(x_1, \dots, x_n)$ sont également formellement réels.

1.3 Corps réels clos

Définition 1.21 (CORPS RÉEL CLOS). Un corps **réel clos** est un corps ordonné ne possédant pas d'extension ordonnée algébrique propre.

Théorème 1.22 (CARACTÉRISATION DES CORPS RÉELS CLOS). *Soit (k, \leq) un corps ordonné. Les conditions suivantes sont donc équivalentes :*

- i) (k, \leq) est réel clos.
- ii) (a) Le cône positif de \leq est égal à l'ensemble k^2 , des carrés de k .
(b) Tout polynôme $f \in k[x]$ de degré impair possède au moins une racine dans k .
- iii) k n'est pas algébriquement clos, mais $k(\sqrt{-1})$ l'est.
- iv) k a un unique ordre, et celui-ci ne s'étend à aucune extension algébrique propre de k .
- v) k possède la propriété de la valeur intermédiaire.

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR]).

Théorème 1.23 (EXISTENCE DE LA CLÔTURE RÉELLE). Soit (k, σ) un corps ordonné et \bar{k} une clôture algébrique. Alors il existe un unique¹ corps réel clos noté (\bar{k}_σ^r, \leq) vérifiant,

i) $k \subset \bar{k}_\sigma^r \subset \bar{k}$.

ii) L'unique ordre \leq de \bar{k}_σ^r étend l'ordre σ .

Le corps \bar{k}_σ^r est appelé **clôture réelle** de (k, σ) .

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR]).

1.4 Principe de *Transfert* de Tarski-Seidenberg

Les références principales de ce paragraphe (langages, formules ...) sont [Hod] et [CK].

Définition 1.24 (LANGAGE DES CORPS ORDONNÉS). Rappelons que le langage habituellement utilisé pour traiter des corps ordonnés dans la logique du premier ordre est le langage :

$$\mathcal{L} := \{+, \cdot, -, 0, 1, \leq\},$$

comportant comme symboles primitifs :

Symboles de fonctions binaires :

$+$ (addition), $-$ (soustraction) et \cdot (multiplication).

Symboles de constantes :

0 (élément neutre) et 1 (élément unitaire).

Symboles de relations binaires :

$=$ (égalité) et \leq (relation d'ordre).

Attention ! Noter que le langage \mathcal{L} ne comporte pas de symbole pour l'inverse multiplicative.

REMARQUES 1.25.

1. Les notions syntaxiques de formules, occurrences libres et liées d'une variable, énoncés, phrases etc., sont définies comme d'habitude dans les langages du premier ordre, ainsi que les notions sémantiques de satisfaction, validité, interprétation etc., dans une structure du langage donné.
2. On désignera par *CRC* la théorie du premier ordre des **corps réels-clos ordonnés** dans le langage \mathcal{L} , où les axiomes sont, par exemple, les énoncés de \mathcal{L} donnés par les conditions (ii) du théorème (1.22) (Noter qu'il y a un nombre infini d'axiomes, un pour chaque degré impair de polynômes).

Fixons-nous, pour la suite de ce paragraphe, un corps ordonné, disons (K, \leq) .

1.4.1 Version modèle-théorique

Théorème 1.26 (ELIMINATION DES QUANTIFICATEURS (TARSKI)). Pour toute \mathcal{L} -formule $\Phi(\underline{x})$ ayant $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ comme variables libres, il existe une \mathcal{L} -formule $\Psi(\underline{x})$, sans quantificateurs et ayant les mêmes variables libres \underline{x} , telle que dans tout corps réel clos (K, \leq) (vu comme \mathcal{L} -structure), on a :

$$K \models \forall \underline{x} (\Phi(\underline{x}) \longleftrightarrow \Psi(\underline{x})).$$

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR] - Proposition 5.2.2).

1. Cette unicité est à unique isomorphisme près, ce qui n'est pas le cas des clôtures algébriques.

REMARQUE 1.27.

On dit que la théorie des corps réels clos admet l'**élimination des quantificateurs**, en conséquence, elle est **décidable**.

Corollaire 1.28 (MODÈLE-COMPLÉTUDE DE (CRC)). Soient (K, \leq) et (K', \leq') deux corps réels clos et soit $f : K \rightarrow K'$ un homomorphisme d'anneaux. Alors pour toute \mathcal{L} -formule $\Phi(\underline{x})$ avec $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ comme variables libres et tout n -uplet $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$:

$$K \models \Phi(\underline{a}) \iff K' \models \Phi(\underline{f(a)}),$$

avec $\underline{f(a)} = (f(a_1), \dots, f(a_n))$.

En particulier, on a :

$$K \subset K' \implies \langle K, \leq \rangle \preceq \langle K', \leq' \rangle^2.$$

REMARQUE 1.29 (ROBINSON (VOIR [ROB])).

Le corollaire (1.28) dit simplement que toute extension d'un corps réel clos est **élémentaire**, i.e., elle conserve et reflète la validité des formules, y compris les énoncés³. Cette propriété est aussi connue sous le nom de **modèle-complétude**. On dit que la théorie des corps réels clos est **modèle-complète**.

1.4.2 Version géométrique

Pour les notions non-définies et utilisées ici, le lecteur pourra consulter [BCR] (voir également [BCR] - paragraphe #2.1.4, pour celle d'ensemble semi-algébrique).

Théorème 1.30 (STABILITÉ DES SEMI-ALGÈBRIQUES : ADHÉRENCE, INTÉRIEUR ET IMAGE). On se donne un corps réel clos (K, \leq) .

- i) Soit S un semi-algébrique d'une variété réelle V sur K , alors $\text{Adh}(S)$ et $\text{Int}(S)$ sont aussi semi-algébriques de cette même variété V .
- ii) Si $f : K^n \rightarrow K^m$ une application polynômiale ou semi-algébrique, alors son image $f(S)$ est un semi-algébrique de K^m .

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR]).

Corollaire 1.31 (STABILITÉ PAR PROJECTIONS CANONIQUES). Soient (K, \leq) un corps réel clos, $f : K^n \rightarrow K^{n-k}$ la projection sur les $n - k^{\text{ème}}$ premières coordonnées de K^n , avec $n > k \in \mathbb{N}$ et S un semi-algébrique de K^n , alors $f(S)$ est un semi-algébrique de K^{n-k} .

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR]).

REMARQUE 1.32.

Le corollaire (1.31) est équivalent à l'élimination des quantificateurs pour (CRC).

Une application du théorème de Transfert de Tarski-Seidenberg est le théorème d'Artin, solution du 17^{ème} problème de Hilbert.

Théorème 1.33 (17^{ème} PROBLÈME DE HILBERT). Soient (K, \leq) un corps réel clos et $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme, à coefficients dans K , vérifiant :

$$f(\underline{b}) \geq 0 ; \quad \forall \underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in K^n.$$

Alors f est une somme de carrés dans $K(x_1, \dots, x_n)$.

DÉMONSTRATION. (Voir [Art]).

2. Les symboles \subset et \preceq désignent respectivement les notations d'inclusion de corps et d'inclusion élémentaire entre structures (voir [Hod]).

3. Un énoncé est une formule sans variables libres.

2 Espaces d'Ordres Abstraits

Mots-clés : Axiomatisation des espaces d'ordres, formes et anneau de Witt, topologie de Harrison, espaces d'ordres finis et de type fini, sous-espaces, opérations, représentation des espaces d'ordres, isométrie, équivalence de Witt, indice de stabilité, longueur de chaîne, principe local-global de Pfister, éventails, approximation forte (SAP), orbite d'un caractère, composantes connexes

Références : [ABR], [BCR], [KMO], [Mar1], [Mar2], [Mar3], [Mar4], [Mar5], [Mar6], [Mar11].

Résumé

La présente section sera dédiée aux **espaces d'ordres abstraits**, une théorie développée par M. Marshall vers la fin des années 70, dans la perspective de développer une théorie axiomatique des formes quadratiques.

Nous rappellerons les éléments de base de cette théorie ; **axiomes** des espaces d'ordres, **topologie de Harrison**, sous-structure (**sous-espaces** d'ordres), puis on rappellera brièvement quelques uns des outils calculatoires, comme les notions d'**éventails**, d'**indice de stabilité** et de **longueur de chaîne**.

2.1 Axiomatisation des espaces d'ordres

Soit $(G, \cdot, 1, -1)$ un groupe multiplicatif d'exposant 2 (*i.e.*, $\forall g \in G, g^2 = 1$), ayant un élément distingué -1 , différent de l'élément unitaire 1. Pour tout élément $g \in G$, le produit $(-1) \cdot g$ sera noté simplement $-g$. On note aussi par $\chi(G)$ le groupe topologique des caractères de G , *i.e.*, ensemble des morphismes de groupes multiplicatifs $\sigma : G \rightarrow \mathbb{Z}_2^4$ muni de la topologie la plus **faible** rendant ces morphismes continus. Autrement dit, les noyaux $\ker(\sigma)$, quand σ parcourt $\chi(G)$, forment une base de cette topologie, appelée **topologie de Harrison**.

Définition 2.1 (PRÉ-ESPACES D'ORDRES). Un **pré-espace d'ordres (abstrait)** sur G est un couple (X, G) , où X est un sous-ensemble non vide de $\chi(G)$, vérifiant les axiomes suivants :

(\mathcal{O}_1) X est un sous-ensemble fermé de $\chi(G)$

(\mathcal{O}_2) $\forall \sigma \in X ; \sigma(-1) = -1$

(\mathcal{O}_3) Soit g un élément de G , alors $(\forall \sigma \in X ; \sigma(g) = 1) \implies (g = 1)$

L'axiome (\mathcal{O}_3) dit de *séparation* peut être substitué par :

(\mathcal{O}'_3) Soient g et h deux éléments de G , alors $(g \neq h) \implies (\exists \sigma \in X ; \sigma(g) \neq \sigma(h))$.

REMARQUES 2.2.

La première composante, X , du couple (X, G) , est dite **domaine topologique** et la seconde, G , sera dite **domaine algébrique**.

Soit, pour la suite, (X, G) un pré-espace d'ordres.

Notion de forme Une n -**forme** ϕ sur (X, G) est un n -uplet d'éléments de G , noté $\phi := \langle g_1, \dots, g_n \rangle$. L'entier n est appelé la **dimension** de la forme ϕ . On note par $Form(X, G)$, ou bien simplement par $Form(G)$, si le contexte est clair, l'ensemble de toutes les formes sur (X, G) .

4. \mathbb{Z}_2 désigne le groupe multiplicatif à deux éléments $(\{+1, -1\}, \cdot)$. Cette notation sera reprise tout au long de cette Thèse.

Opérations sur les formes On définit sur $Form(G)$ les opérations suivantes :

Addition :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \oplus \langle b_1, \dots, b_m \rangle := \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle$$

Produit tensoriel :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \otimes \langle b_1, \dots, b_m \rangle := \langle a_1 \cdot b_1, \dots, a_1 \cdot b_m, \dots, a_n \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_m \rangle$$

Produit scalaire :

$$a \cdot \langle a_1, \dots, a_n \rangle := \langle a \rangle \otimes \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n \rangle$$

n -copies : Soient n un entier naturel et ϕ une forme. On écrit $n \times \phi = \phi \oplus \dots \oplus \phi$ pour désigner la somme de n copies de ϕ . On pose par convention $0 \times \phi = \langle \rangle$, appelée aussi la forme *vide* ou *nulle*.

Formes de Pfister Une **1-forme de Pfister** est une 2-forme qui s'écrit $\langle\langle g \rangle\rangle := \langle 1, g \rangle$. De façon plus générale, une **n -forme de Pfister** est une 2^n -forme s'écrivant $\langle\langle g_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle g_n \rangle\rangle$. On note aussi cette forme par $\langle\langle g_1, \dots, g_n \rangle\rangle$ ou par $\bigotimes_{i=1}^{i=n} \langle 1, g_i \rangle$.

Signature globale Pour tout élément $\sigma \in X$ et toute forme $\phi = \langle g_1, \dots, g_n \rangle \in Form(G)$, on définit la σ -**signature** de ϕ comme étant l'entier relatif $\sigma(\phi) = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma(g_i) \in \mathbb{Z}$. La **signature globale** d'une forme ϕ est l'application :

$$\begin{aligned} \phi(\cdot) : X &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sigma &\longmapsto \phi(\sigma) = \sigma(\phi) \end{aligned}$$

Isométrie Deux formes ϕ et ψ sont dites **isométriques** sur (X, G) et on note $\phi \equiv_G \psi$ ou simplement $\phi \equiv \psi$, si le contexte est clair, si elles ont la même dimension et la même signature globale. L'isométrie des formes est une relation d'équivalence compatible avec les opérations d'addition et de produit scalaire. Lorsqu'on parle de n -forme sur G (ou sur (X, G)), on sous entend bien évidemment un représentant d'une classe d'équivalence modulo l'isométrie. L'ensemble $Form(G)/\equiv$, de ces classes d'équivalence, muni des traces des opérations définies plus haut n'est jamais un anneau et ce à cause du fait qu'à part la forme nulle, aucune autre forme ne possède de forme opposée. On convient d'appeler **forme unitaire** la forme $\langle 1 \rangle$. Pour remédier à cela, nous introduirons, plus bas, une relation binaire d'équivalence plus large sur l'ensemble $Form(G)$ des formes sur G , dite **équivalence de Witt**.

Isotropie - Hyperbolicité Une forme ϕ de dimension $n \geq 2$ est dite **isotrope**, si elle est isométrique à une somme $\langle 1, -1 \rangle \oplus \psi$, où ψ est une forme de dimension $n - 2$, dans le cas contraire, elle est dite **anisotrope**. Une forme de dimension $2 \cdot n$ est dite **hyperbolique** si elle est isométrique à la forme $n \times \langle 1, -1 \rangle$.

Équivalence de Witt Deux formes ϕ et ψ sont dites **Witt-équivalentes** sur (X, G) et on note $\phi \sim \psi$, si elles ont la même signature globale. Ainsi définie, la relation \sim est une relation d'équivalence sur $Form(G)$, de plus, le quotient $Form(G)/\sim$ est un anneau commutatif. Nous noterons cet anneau par $W(X, G)$ ou simplement par $W(G)$. Si ϕ est une forme isotrope avec $\phi = \langle 1, -1 \rangle \oplus \psi$, alors $\phi \sim \psi$. Réciproquement, si $\phi \sim \psi$, alors il existe deux entiers naturels n et m tels que $n \cdot \langle 1, -1 \rangle \oplus \phi = m \cdot \langle 1, -1 \rangle \oplus \psi$.

Représentation et ensemble des valeurs Pour toute forme $\phi = \langle g_1, \dots, g_n \rangle \in \text{Form}(G)$ et pour tout élément $a \in G$, on dit que a est **représenté** par ϕ sur (X, G) , et on écrit $a \in D_G(\phi)$, ou simplement $a \in D(\phi)$, s'il existe un élément $g \in D(\langle g_2, \dots, g_n \rangle)$ tel que $a \in D(\langle g_1, g \rangle)$. La représentation des n -formes se déduit donc, par récurrence à partir de la représentation par les 1-formes et les 2-formes qui, elles, sont définies comme suit :

$$(a \in D(\langle b \rangle) \Leftrightarrow a = b) \quad \text{et} \quad (a \in D(\langle b, c \rangle) \Leftrightarrow \forall \sigma \in X, \sigma(a) = \sigma(b) \vee \sigma(a) = \sigma(c)).$$

L'ensemble $D(\phi)$ est appelé **ensemble des valeurs** de ϕ .

Le résultat suivant donne une caractérisation de l'équivalence de Witt en termes des signatures globales des formes.

Théorème 2.3 (PRINCIPE LOCAL-GLOBAL DE PFISTER). *On se donne un pré-espace d'ordres (X, G) ainsi que deux formes ϕ et ψ sur G . On a alors équivalence entre les assertions suivantes :*

- i) $\phi \sim \psi$ (ϕ et ψ sont Witt-équivalentes).
- ii) $\phi - \psi := \phi \oplus (-\psi)$ est hyperbolique.
- iii) $\forall \sigma \in X, \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$. En d'autres termes, les signatures globales sont égales :

$$\begin{array}{ccc} \phi(\cdot) : X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \sigma & \longmapsto & \phi(\sigma) = \sigma(\phi) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \psi(\cdot) : X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \sigma & \longmapsto & \psi(\sigma) = \sigma(\psi) \end{array}$$

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar11] - Théorème 2.3.1).

Définition 2.4 (ESPACES D'ORDRES ABSTRAITS). Un pré-espace d'ordres (X, G) est dit un **espace d'ordres (abstrait)** s'il vérifie l'un des axiomes équivalents suivants :

(\mathcal{O}_4) Soient ϕ et ψ deux formes sur G et $g \in G$. Si $g \in D(\phi \oplus \psi)$, alors $\exists a \in D(\phi), \exists b \in D(\psi)$ tels que $g \in D(\langle a, b \rangle)$.

(\mathcal{O}'_4) Soient $\phi, \psi \in \text{Form}(G)$. Si $\phi \oplus \psi$ est isotrope, alors $D(\phi) \cap D(\psi) \neq \emptyset$.

(Voir [Mar2] - Lemme 1.3).

Théorème 2.5 (CARACTÉRISATION DES ÉLÉMENTS DU DOMAINE TOPOLOGIQUE X). *Soient (X, G) un espace d'ordres et $\sigma \in \chi(G)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\sigma \in X$.
- ii) $\forall g \in G, g \in \ker(\sigma) \implies D(\langle 1, g \rangle) \subset \ker(\sigma)$.

En d'autres termes, un caractère σ est un ordre si, et seulement si, son noyau est un sous-groupe saturé de G (voir définition (3.10)).

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar11] - Notes (1), ou bien [Mar3] - Lemme 4.1, pour les détails).

Exemples 2.6 (ESPACE D'ORDRES D'UN CORPS).

1. On considère un corps formellement réel k . On note par $G_k = k^* / \sum (k^*)^2$ son groupe multiplicatif quotienté par le sous-groupe des sommes, non nulles, des carrés de k et par X_k l'ensemble de ses ordres. Alors le couple (X_k, G_k) est un espace d'ordres abstrait au sens de la définition (2.4), où l'isométrie des n -formes est donnée par le théorème d'isométrie de Pfister.
2. Si on pose $O = \mathbb{Z}_2$ et $E = \{Id_{\mathbb{Z}_2}\} \subset \chi(\mathbb{Z}_2)$, alors le couple (E, O) possède une structure d'espace d'ordres abstrait. Il est isomorphe à (X_K, G_K) , où K est un corps réel clos. On l'appelle **espace atomique**.

2.2 Topologie des espaces d'ordres

Soit (X, G) un espace d'ordres (abstrait).

On peut voir chaque élément $g \in G$ comme une application (voir paragraphe #2.1, **Signature globale**) :

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ \sigma &\longmapsto g(\sigma) = \sigma(g), \end{aligned}$$

\mathbb{Z}_2 étant muni de la topologie discrète, on peut définir sur X une topologie dite de **Harrison**, qui est la plus faible, pour laquelle ces applications sont continues. Cette topologie n'est autre que la trace sur X de la topologie de Harrison de $\chi(G)$. Plus précisément, si l'on note, pour tout élément $g \in G$, $U(g) := \{\sigma \in X; \sigma(g) = 1\}$ et $\mathcal{H}_G = \{U(g); g \in G\}$, alors par l'axiome de séparation ($\mathcal{O}3'$), on a : Si $g \neq h \in G$, alors $U(g) \neq U(h)$. On a ainsi une application bijective :

$$\begin{aligned} U(\cdot) : G &\longrightarrow \mathcal{H}_G \\ g &\longmapsto U(g) \end{aligned} \tag{1}$$

Par cette bijection, \mathcal{H}_G , peut-être muni d'une structure de groupe d'exposant 2, comme le stipule le lemme qui suit.

Lemme 2.7. Soient g et h deux éléments de G . Alors :

$$U(g) \triangle U(h) = U(-g \cdot h)^5$$

Corollaire 2.8. Soient (X, G) un espace d'ordres, g et h deux éléments de G . On a :

- i) $U(g) \triangle U(h) = U(h) \triangle U(g)$.
- ii) $U(a) \triangle U(a) = U(-1)$.
- iii) $U(-1) \triangle U(a) = U(a)$ et $U(1) \triangle U(a) = U(-a)$.
- iv) $U(-1) = \emptyset$ et $U(1) = X$.

REMARQUE 2.9.

D'après le point (ii). du corollaire (2.8), l'application $U(\cdot)$ précédente ne pourra être un morphisme de groupes, car si c'était le cas, on aurait :

$$U(1) = U(1 \cdot 1) = U(1) \triangle U(1) = U(-1),$$

ce qui contredit l'axiome de séparation ($\mathcal{O}3'$). Voici comment remédier à cela :

Proposition 2.10. L'application :

$$\begin{aligned} U(\cdot) : (G, \cdot, 1, -1) &\longrightarrow (\mathcal{H}_G, \triangle, X, \emptyset) \\ g &\longmapsto U(-g) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes d'exposants 2, qui envoie 1 sur $U(-1) := \emptyset$, -1 sur $U(1) = X$ et plus généralement $g \cdot h$ sur $U(g \cdot h) := U(-g) \triangle U(h)$. De plus, on a :

$$U(-g) = U(1) \triangle U(g) = X \triangle U(g) = X \setminus U(g) \tag{2}$$

5. Le symbole \triangle désigne la *différence symétrique*.

Le dernier point de cette proposition (égalité (2)) dit simplement que l'ensemble \mathcal{H}_G est stable par passage au complémentaire. On appelle ses éléments des **ouverts-fermés principaux**. Par ailleurs, \mathcal{H}_G engendre une base de topologie sur X , constituée des intersections finies :

$$U(g_1, \dots, g_n) := \bigcap_{i=1}^{i=n} U(g_i) = \{\sigma \in X; \sigma(g_i) = 1, \forall i \in \{1, \dots\}\} \quad (3)$$

appelées **ouverts-fermés basiques**. Une union finie d'ensembles $U(g_1, \dots, g_n)$ s'appelle ensemble **constructible**.

2.3 Sous-espaces

NOTATIONS 2.11.

On se donne un espace d'ordres (X, G) ainsi que deux ensembles $Y \subset \chi(G)$ et $\Delta \subset G$. On pose les notations suivantes :

$$Y^\perp := \{g \in G; \forall \sigma \in Y, \sigma(g) = 1\} \quad (4)$$

On appelle un élément $g \in G$ vérifiant $\forall \sigma \in Y, \sigma(g) = 1$, **annulateur positif** de Y .

$$\Delta^\perp := \{\sigma \in X; \forall g \in \Delta, \sigma(g) = 1\} \quad (5)$$

Lemme 2.12. Soit (X, G) un espace d'ordres et $\Delta \subset G$ un sous-ensemble non vide. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\Delta = (\Delta^\perp)^\perp$.
- ii) $\forall g \in G, g \in \Delta \implies D(1, g) \subset \Delta$.
- iii) Le couple $(\Delta^\perp, G/\Delta)$ est un espace d'ordres.

Un tel ensemble Δ est un sous-groupe dit un **sous-groupe saturé** de G (voir définition (3.10)).

Définition 2.13 (SOUS-ESPACE). Un **sous-espace d'ordres** de (X, G) est un couple (Y, H) où $H = G/\Delta$, Δ un sous-groupe saturé de G et $Y := \Delta^\perp$.

En d'autres termes, un sous-espace d'ordres de (X, G) est un couple (Y, H) vérifiant :

- (DA) $\exists \Delta \subset G$, un sous-ensemble non vide, tel que $H = G/(\Delta^\perp)^\perp$.
- (DT) $Y = \bigcap_{d \in \Delta} U(d)$.

Théorème 2.14. Tout sous-espace (Y, H) d'un espace d'ordres (X, G) est aussi un espace d'ordres.

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar11] - Théorème 2.4.3).

2.4 Eventails

Définition 2.15 (EVENTAIL). Soit G un groupe multiplicatif d'exposant 2, ayant 1 comme unité et un élément distingué $-1 \neq 1$, et posons $X = \{\sigma \in \chi(G); \sigma(-1) = -1\}$.

Le couple (X, G) ainsi défini est appelé un **éventail**⁶. Un tel éventail (X, G) est dit **trivial** si X contient au plus deux éléments (ordres), autrement, il est dit **non trivial** ou **propre**.

Théorème 2.16. Tout éventail est aussi un espace d'ordres.

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar11] - Théorème 3.1.1).

6. En terminologie anglaise un éventail est dit *fan*.

Proposition 2.17 (CARACTÉRISATION DES ÉVENTAILS). *Soit (X, G) un espace d'ordres. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) (X, G) est un éventail.
 - ii) $\forall g \in G \setminus \{-1\} ; D(\langle 1, g \rangle) = \{1, g\}$.
 - iii) $\forall a_1, \dots, a_n \in G$ tel que $-1 \notin D(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$, on a $D(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \{a_1, \dots, a_n\}$.
 - iv) (X, G) est une extension par un groupe d'exposant 2 de l'espace atomique (E, O) (voir définition (2.41) pour l'opération d'extension).
- Si de plus X est fini et engendré par n éléments, alors $\text{card}(G) = 2 \cdot \text{card}(X) = 2^n$.

Définition 2.18 (EVENTAILS EN TANT QUE SOUS-ESPACES). Un sous-espace d'un espace d'ordres est dit un **éventail** de ce dernier, s'il est un éventail en tant qu'espace d'ordres.

Proposition 2.19.

- i) Tout sous-espace d'un éventail est un éventail.
- ii) Toute extension par un groupe d'exposant 2 d'un éventail en est un aussi.

Définition 2.20. Un **éventail de 4-éléments** est un espace d'ordres dont le domaine topologique est composé de 4 ordres $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ vérifiant $\sigma_4 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$.

2.5 Caractérisation des sous-espaces

Le théorème (2.22), dont l'énoncé figure, sans démonstration, dans [ABR] - p. 87, constitue un moyen très puissant de caractérisation des sous-espaces d'un espace d'ordres. Nous fournissons une démonstration élémentaire à ce théorème dans le présent paragraphe.

NOTATIONS 2.21.

Soit G un groupe multiplicatif d'exposant 2 et de cardinal au moins 4, avec $-1 \neq 1 \in G$.

1. Pour tout sous-ensemble non vide $Z \subset \chi(G)$, on définit $\text{Lin}(Z)$ comme étant le sous-groupe de $\chi(G)$ engendré par les éléments de Z , i.e. :

$$\text{Lin}(Z) = \{\sigma_1 \dots \sigma_n ; \text{ où les } \sigma_i \text{ et } n \text{ parcourent respectivement } Z \text{ et } \mathbb{N}\}$$

2. On note également par $\text{Adh}(Z)$ l'adhérence de Z dans $\chi(G)$, pour sa topologie de Harrison, c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés contenant Z .

Théorème 2.22 (THÉORÈME DE CARACTÉRISATION (1)). *Soient (X, G) un espace d'ordres et $Y \subset X$ un sous-ensemble non vide de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) (Y, H) est un sous-espace d'ordres de (X, G) , où $H := G/Y^\perp$.
- ii) $Y = \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X$.

DÉMONSTRATION.

(i \Rightarrow ii) On suppose que (Y, H) soit un sous-espace d'ordres de (X, G) , i.e., $Y = (Y^\perp)^\perp$.

Montrons que $Y = \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X$.

\subseteq) Cette inclusion est triviale. En effet :

$$Y = Y \cap X \subseteq \text{Lin}(Y) \cap X \subseteq \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X$$

\supseteq) On suppose par l'absurde qu'il existe $y' \in (\text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X) \setminus Y$, donc $\exists s \in Y^\perp$ tel que $y'(s) = -1$, i.e., $y'(-s) = 1$. $U(-s)$ est un ouvert(-fermé) contenant $y' \in \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X$, il contiendra également un élément $y = y_1 \dots y_n \in \text{Lin}(Y)$, avec $y_i \in Y, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, ce qui donne $y(s) = -1$. Ceci force l'un, au moins, des $y_i \in Y$ à posséder un signe négatif en s , ce qui contredit l'hypothèse sur l'appartenance de s à Y^\perp . On a ainsi $Y = \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X$.

(ii \Rightarrow i) Supposons maintenant que Y vérifie l'égalité $Y = \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X$. Montrons que (Y, H) est un sous-espace d'ordres de (X, G) , c'est-à-dire que $Y = (Y^\perp)^\perp$. L'inclusion $Y \subseteq (Y^\perp)^\perp$ est triviale. Montrons que $(Y^\perp)^\perp \subseteq Y$. Ceci revient à montrer que :

$$\bigcap_{s \in Y^\perp} U(s) \subseteq \text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X,$$

ou de façon équivalente, il suffit de montrer que :

$$\bigcap_{s \in Y^\perp} U(s) \subseteq \text{Adh}(\text{Lin}(Y)),$$

car le membre de gauche est toujours un sous-ensemble de X , par définition.

Soient, $y' \in \bigcap_{s \in Y^\perp} U(s)$ et U un ouvert de $\chi(G)$ contenant y' . Comme U est une union d'ouverts-fermés basiques de $\chi(G)$, alors y' doit appartenir à l'un de ces ouverts-fermés. On peut donc supposer que $U := U_{\chi(G)}(s_1, \dots, s_n)$, avec $s_i \in G$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Fait 2.23. Soit $s' \in G$ tel que $y' \in U(s')$. Alors $Y \cap U(s') \neq \emptyset$.

En effet, si tel n'est pas le cas, alors $-s' \in Y^\perp$ et donc $y' \in \bigcap_{s \in Y^\perp} U(s)$, ce qui implique $y' \in U(s') \cap U(-s') = \emptyset$.

Par le fait (2.23), et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists y_i \in Y$ tel que $y_i \in U(s_i)$.

Montrons par récurrence sur n que $U \cap \text{Lin}(Y) \neq \emptyset$.

Pour $n = 1$: La réponse est donnée par le fait (2.23) précédent.

Pour $n = 2$: On a une partition de X comme suit :

$$X = U(s_1, s_2) \bigsqcup U(-s_1, -s_2) \bigsqcup U(s_1, -s_2) \bigsqcup U(-s_1, s_2)$$

Et d'après le fait (2.23) toujours, on a : $\exists y_1 \in U(s_1) \cap Y$, $\exists y_2 \in U(s_2) \cap Y$ et $\exists y_3 \in U(s_1 \cdot s_2) \cap Y$.

Si un des y_i est dans $U(s_1, s_2)$, on prend $y := y_i$:

Sinon, on prend $y := y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \in \text{Lin}(Y)$, qui vérifie aussi $y \in U(s_1, s_2)$, i.e., $U \cap \text{Lin}(Y) \neq \emptyset$.

Pour $n \geq 2$: Par hypothèse, on a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists y_i \in \text{Lin}(Y) \cap U(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

Si un de ces y_i est dans $U(s_i)$, on prend $y := y_i$:

Sinon, $\forall i$, $y_i \in U(s_1, \dots, s_n) \setminus U(s_i)$.

Par ailleurs, par le même fait, il existe un élément $\bar{y} \in \text{Lin}(Y) \cap U(s_1, \dots, s_n)$. Ceci implique que \bar{y} prend un signe négatif en un nombre pair, disons r , des s_i .

Si $r = 0$, on prend $y = \bar{y}$:

Sinon, si \bar{y} est négatif en s_{i_1}, \dots, s_{i_r} , on prend $y = \bar{y} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, r\}} y_{i_j}$.

On peut ainsi vérifier facilement que $y \in \text{Lin}(Y) \cap U(s_1, \dots, s_n)$, ce qui prouve que :

$$\bigcap_{s \in Y^\perp} U(s) \subseteq \text{Adh}(\text{Lin}(Y)),$$

donc $Y = (Y^\perp)^\perp$, c'est-à-dire que $(Y, G/Y^\perp)$ est un sous-espace d'ordres de (X, G) . Ce qui finit la preuve du théorème (2.22).

Corollaire 2.24. Soit (X, G) un espace d'ordres abstrait.

i) Pour tout sous-ensemble non vide Y de X , le couple :

$$\left(\text{Adh}(\text{Lin}(Y)) \cap X \quad , \quad G/(\text{Adh}(\text{Lin}(Y)))^\perp \right)$$

est un sous-espace d'ordres de (X, G) , et c'est le sous-espace engendré par Y , i.e., le plus petit sous-espace d'ordres de (X, G) contenant Y dans son domaine topologique.

ii) En particulier, si $\text{Lin}(Y)$ est fermé dans $\chi(G)$, donc dans X , alors le sous-espace d'ordres engendré par Y dans (X, G) est :

$$\left(\text{Lin}(Y) \cap X \quad , \quad G/(\text{Lin}(Y) \cap X)^\perp \right)$$

Dans [ABR], on a une caractérisation très jolie des sous-ensembles de X vérifiant la condition $Y = \text{Lin}(Y) \cap X$ en faisant intervenir les éventails de 4 éléments. Le théorème suivant reprend cette caractérisation avec une nouvelle démonstration, tout aussi élémentaire.

Théorème 2.25 (THÉORÈME DE CARACTÉRISATION (2)). *Pour tout espace d'ordres (X, G) et sous-ensemble non vide $Y \subset X$, on a :*

$$\forall F \in \mathcal{F}_4(X) ; \#(F \cap Y) \neq 3 \implies Y = \text{Lin}(Y) \cap X,$$

où $\mathcal{F}_4(X)$ désigne l'ensemble des éventails de 4 éléments de (X, G) .

DÉMONSTRATION.

\subseteq) : L'inclusion $Y \subseteq \text{Lin}(Y) \cap X$ est toujours vraie.

\supseteq) : On se donne un ordre $\sigma \in \text{Lin}(Y) \cap X$. On peut donc écrire σ comme un produit ; $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ avec $\sigma_i \in Y$ et n impair et minimal, i.e., aucun des σ_i ne s'écrit comme produit des autres (*une telle écriture de σ n'est pas toujours unique !*).

On va montrer que si l'inclusion $Y \subset \text{Lin}(Y) \cap X$ est stricte, i.e., s'il existe un tel $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ avec $n > 1$ et $\sigma \notin Y$, alors il existerait un éventail $F \in \mathcal{F}_4(X)$ tel que $\#(F \cap Y) = 3$, ce qui contredirait l'hypothèse.

On note par $(\overline{Y}, G_{\overline{Y}})$ le sous-espace d'ordres (fini) de X engendré par les σ_i , en d'autres termes $\overline{Y} = \text{Lin}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \cap X$ (car $\text{Lin}(\overline{Y})$ est fini, donc fermé dans $\chi(G)$).

On pose par ailleurs :

$$\overline{Y}_1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\},$$

$$\overline{Y}_3 = \{\sigma_i \sigma_j \sigma_k ; \sigma_i \neq \sigma_j \neq \sigma_k \neq \sigma_i\},$$

\vdots

$$\overline{Y}_r = \{\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_r} ; \text{avec les } \sigma_{i_j} \text{ deux-à-deux distincts et } r \leq n, \text{ impair}\},$$

\vdots

$$\overline{Y}_n = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\} := \{\sigma\}.$$

Les \overline{Y}_r ainsi définis, forment une partition de $\text{Lin}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \subset \text{Lin}(Y)$.

Le fait suivant est une conséquence du *lemme miraculeux* (voir [Mar1] - Basic Lemma 3.1), mais peut-être démontré indépendamment de ce dernier.

Fait 2.26. $\forall j \in \{0, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}^7, \overline{Y}_{2j+1} \cap X \neq \emptyset.$

Montrons maintenant par récurrence sur n que $\sigma \in Y$.

Si $n = 1$: Rien à faire, car $\sigma = \sigma_1 \in Y$.

Si $n = 3$: Par le fait précédent, $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \in \text{Lin}(Y) \cap X$ qui est en particulier un élément de X , donc $F = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3\}$ est un éventail de 4 éléments de X , qui contient les éléments σ_1, σ_2 et $\sigma_3 \in Y$, donc par l'hypothèse ($\#(F \cap Y) \neq 3$), il doit contenir aussi leur produit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$. Ce qui prouve que $\sigma \in Y$.

7. Le symbole $\lceil a \rceil$ désigne la partie entière d'un nombre réel a .

Si $n > 3$: Toujours par le fait (2.26), quitte à faire une permutation sur les indices, supposons que $\sigma_3 \dots \sigma_n \in \overline{Y_{n-2}} \cap X$, et par hypothèse de récurrence, on aura $\sigma_3 \dots \sigma_n \in Y$. Considérons donc l'éventail suivant : $F = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_n, \sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \dots \sigma_n\}$. L'ensemble $F \cap Y$ contient déjà les éléments σ_1, σ_2 et $\sigma_3 \dots \sigma_n$, il contiendra donc (par hypothèse) leur produit σ .

Ce qui prouve que $\text{Lin}(Y) \cap X \subseteq Y$, donc $\text{Lin}(Y) \cap X = Y$

Cette démonstration donne aussi :

Corollaire 2.27. Soit $Y \subset X$, (X, G) étant un espace d'ordres, tel que $\forall F \in \mathcal{F}_4(X)$, $\#(F \cap Y) \neq 3$. Alors :

- i) Si $\text{Lin}(Y)$ est fermé dans $\chi(G)$, alors $(Y, G/Y^\perp)$ est un sous-espace d'ordres de (X, G) .
- ii) Si Y est fini, alors $(Y, G/Y^\perp)$ est un sous-espace d'ordres de (X, G) .

2.5.1 Exemples de sous-espaces d'ordres

A- Orbites de caractères

NOTATIONS 2.28.

Soit (X, G) un espace d'ordres et soit $\alpha \in \chi(G)$ un caractère de G .

On note :

$$X_\alpha = \{\sigma \in X; \alpha \cdot \sigma \in X\} = X \cap \alpha \cdot X, \text{ et },$$

$$G_\alpha = G / \ker(\alpha) = \{g|_{X_\alpha}{}^8; g \in G\} = X_\alpha^\perp.$$

Proposition-Définition 2.29 (ORBITE D'UN CARACTÈRE). Le couple (X_α, G_α) est un sous-espace d'ordres de (X, G) , appelé **orbite de α** dans (X, G) .

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar2] - Remarque 3.7).

B- Espaces d'ordres relatifs de corps formellement réels

NOTATIONS 2.30.

Soit k un corps formellement réel et P un préordre sur k . Posons $X_P = \{\sigma \in X_k; P \subset \sigma\}$ et $G = k^*/P^*$ (voir notations (1.15)).

Proposition-Définition 2.31. Le couple (X_P, G_P) ainsi défini est un sous-espace d'ordres de (X_k, G_k) , appelé **sous-espace relatif à P** . Réciproquement, tout sous-espace de (X_k, G_k) est de cette forme.

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar11] - Théorème 2.1.4).

2.6 Opérations sur les espaces d'ordres

2.6.1 Somme directe

Définition 2.32 (SOMME DIRECTE). On se donne deux espaces d'ordres (X_1, G_1) et (X_2, G_2) . La **somme directe** de ces espaces, notée $(X_1, G_1) \oplus (X_2, G_2)$, est définie comme étant le couple (X, G) , avec :

$$X := X_1 \sqcup X_2 \text{ (union disjointe) et } G := G_1 \times G_2 \text{ (produit cartésien),}$$

où :

8. $g|_{X_\alpha}$ désigne la restriction de g au sous-ensemble X_α de X .

Éléments distingués : $\mathbf{1}_G = (1_{G_1}, 1_{G_2})$ et $-\mathbf{1}_G = (-1_{G_1}, -1_{G_2})$.

Opération : $(a_1, a_2) \cdot_G (b_1, b_2) = (a_1 \cdot_{G_1} b_1, a_2 \cdot_{G_2} b_2)$.

Proposition 2.33. *L'opération de somme directe est :*

Commutative : $(X, G) \oplus (X', G') = (X', G') \oplus (X, G)$.

Associative : $((X, G) \oplus (X', G')) \oplus (X'', G'') = (X, G) \oplus ((X', G') \oplus (X'', G''))$.

Lemme 2.34. *Soient $(X, G) = (X_1, G_1) \oplus (X_2, G_2)$ une somme directe de deux espaces non vides et (Y, H) un sous-espace de (X, G) . Si on pose $Y_i := Y \cap X_i$ et $H_i = H/(H \cap G_i)$, et on suppose que $Y_i \neq \emptyset$, pour tout $i \in \{1, 2\}$, alors on a :*

i) (Y_i, H_i) est un sous-espace de (Y, H) , $\forall i \in \{1, 2\}$.

ii) De plus, on a $(Y, H) = (Y_1, H_1) \oplus (Y_2, H_2)$.

Lemme 2.35. *Réciproquement, pour tous couples d'espaces et sous-espaces d'ordres $(Y_i, H_i) \subset (X_i, G_i)$ avec $i \in \{1, 2\}$, l'espace $(Y_1, H_1) \oplus (Y_2, H_2)$ est aussi un sous-espace d'ordres de $(X_1, G_1) \oplus (X_2, G_2)$.*

Proposition 2.36 (LIEN AVEC LES ÉVENTAILS). *Soit (X, G) un éventail contenant au moins 4 éléments d'une somme directe d'espaces non vides $(X_1, G_1) \oplus (X_2, G_2)$, alors soit $X \subset X_1 \setminus X_2$ ou bien $X \subset X_2 \setminus X_1$.*

Exemple 2.37. Soit (E, O) l'espace atomique. Alors la somme directe de n copies de (E, O) est un espace d'ordres dont le domaine topologique est composé de n éléments. Cet espace est noté $n \cdot (E, O)$.

Définition 2.38 (ESPACE (IN)DÉCOMPOSABLE). Un espace d'ordres (X, G) est dit **décomposable**⁹, s'il est somme directe de deux espaces non vides. Un espace qui n'admet pas une telle décomposition est dit **indécomposable**.

Proposition 2.39 (CRITÈRE D'INDÉCOMPOSABILITÉ). *Soit (X, G) un espace d'ordres abstrait. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) (X, G) est indécomposable.

ii) Pour tout ouvert-fermé propre $U \subset X$, il existe un éventail non trivial \mathcal{F} tel que $\mathcal{F} \cap U \neq \emptyset$ et $\mathcal{F} \not\subset U$.

iii) Pour tout ouvert-fermé propre $U \subset X$, il existe un éventail de 4 éléments \mathcal{F} tel que $\#(\mathcal{F} \cap U) \in \{1, 2, 3\}$.

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar2] - Remarque 2.12, pour des indications).

Corollaire 2.40. *Tout éventail d'au moins 4 éléments est indécomposable.*

2.6.2 Extension par un groupe d'exposant 2

Définition 2.41 (EXTENSION). Soient (X, G) un espace d'ordres et Δ un groupe d'exposant 2. L'**extension** de (X, G) par Δ , notée $(X, G)[\Delta] := (X[\Delta], G[\Delta])$, est définie par :

$$X[\Delta] := X \times \chi(\Delta).$$

$$G[\Delta] := G \times \Delta = \{(g, \delta) ; g \in G \text{ et } \delta \in \Delta\}, \text{ où :}$$

Éléments distingués : $\mathbf{1}_{G[\Delta]} = (1_G, 1_\Delta)$ et $-\mathbf{1}_{G[\Delta]} = (-1_G, 1_\Delta)$.

Opération : $(a_1, \delta_1) \cdot_{G[\Delta]} (a_2, \delta_2) = (a_1 \cdot_G a_2, \delta_1 \cdot_\Delta \delta_2)$.

9. Terminologie de [Mar2] - Définition 2.10.

Si $\text{card}(\Delta) = 2^n$, alors n est dit **poïds** de cette extension¹⁰.

Les preuves des propositions suivantes sont consultables dans [ABR], par exemple.

Proposition 2.42. *L'opération d'extension est :*

Commutative : $((X, G)[\Delta])[\Delta'] = ((X, G)[\Delta'])[\Delta]$.

Associative : $((X, G)[\Delta \times \Delta'])[\Delta''] = ((X, G)[\Delta])[\Delta' \times \Delta'']$.

Proposition 2.43. *Soient (X, G) un espace d'ordres et Δ un groupe d'exposant 2.*

Soient également (Y, H) un sous-espace de (X, G) et Δ' un sous-groupe de Δ . Alors $(Y, H)[\Delta']$ est un sous-espace de $(X, G)[\Delta]$.

Proposition 2.44. *Toute extension d'espace d'ordres par un groupe d'exposant 2 ayant au moins 4 éléments est indécomposable.*

Exemple 2.45. Si $\text{card}(\Delta) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $(E, O)[\Delta]$ est un éventail de cardinal 2^n .

2.7 Composantes connexes

Définition 2.46. Soit (X, G) un espace d'ordres abstrait. Deux ordres σ_1 et σ_2 de X sont dits **connectés** (on dit aussi **connexes**), s'il existe deux éléments τ_1 et τ_2 de X tels que $\sigma_1 \cdot \tau_1 = \sigma_2 \cdot \tau_2$, et on écrit $\sigma_1 \sim \sigma_2$. Dans ce cas, si les ordres σ_1 , τ_1 , σ_2 et τ_2 sont tous distincts, alors ils forment un éventail de 4 éléments de (X, G) .

Lemme 2.47. *La relation binaire \sim est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence des éléments de X sont dites les **composantes connexes** de X (ou de l'espace d'ordres (X, G)).*

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar4] - Théorème 2.3).

REMARQUE 2.48.

Soit (X, G) un espace d'ordre abstrait.

1. Si \overline{X} est une composante connexe fermée de (X, G) , alors $(\overline{X}, G/\overline{X}^\perp)$ est un sous-espace d'ordres de (X, G) .
Ceci n'est pas vrai si \overline{X} n'est pas fermé!! (Voir [Mar4] - Remarque 2.9).
2. Si (X, G) ne contient qu'un nombre fini de composantes connexes fermées, alors il est somme directe de ces dernières (vues comme sous-espaces).
3. Si (X, G) ne possède qu'une composante connexe, alors il est dit **connexe**.
4. Un ordre $\sigma \in X$ est dit **archimédien** si sa composante connexe est $\{\sigma\}$; autrement, il est dit **non archimédien**.

2.8 Quelques invariants des espaces d'ordres

2.8.1 Indice de stabilité et Approximation forte (SAP)

Définition 2.49 (INDICE DE STABILITÉ). L'**indice de stabilité** d'un espace d'ordres abstrait (X, G) , noté $st(X, G)$, est le plus grand entier naturel n tel que (X, G) contient un éventail ayant 2^n éléments. Si un tel entier n'existe pas, on convient de noter $st(X, G) = \infty$.

L'indice de stabilité d'un espace d'ordres est un invariant topologique.

10. On utilise la notation $\text{card}(A)$ pour désigner le cardinal d'un ensemble A .

Proposition 2.50 (CARACTÉRISATION DE L'INDICE DE STABILITÉ). *Soit (X, G) un espace d'ordres et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. On a équivalence entre les assertions suivantes :*

- i) $st(X, G) \leq n$.
- ii) Tout ouvert-fermé basique $U \subset X$ (pour la topologie des espace d'ordres) peut s'écrire $U = U(a_1, \dots, a_n)$, pour un choix des éléments a_1, \dots, a_n dans G .
- iii) Toute forme de Pfister ϕ sur (X, G) est Witt-équivalente à une forme de Pfister du type $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$, pour un choix des a_1, \dots, a_n dans G .

DÉMONSTRATION. (Voir [ABR]).

REMARQUE 2.51.

1. Par définition des éventails (triviaux), un espace d'ordres est d'indice de stabilité 0 si, et seulement si, il est isomorphe à l'espace atomique (E, \mathcal{O}) .
2. Les espaces d'indice de stabilité au plus égal à 1 forment une classe très intéressante d'espaces d'ordres, dits espaces vérifiant la **propriété d'approximation forte**, appelés aussi espaces **SAP**¹¹ dont voici une caractérisation :

Proposition 2.52 (CARACTÉRISATION DES ESPACES SAP). *Soit (X, G) un espace d'ordres. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- i) $st(X, G) \leq 1$.
- ii) Pour tous sous-ensembles disjoints A et B de X , il existe $a \in G$ tel que $A \subset U(a)$ et $B \subset U(-a)$.
- iii) Pour tout sous-ensemble fermé $Y \subset X$, le couple $(Y, G|_Y)$ est un sous-espace d'ordres de (X, G) .
- iv) $G = \text{Cont}(X, \mathbb{Z}_2)$, où X est muni de sa topologie d'espace d'ordres et \mathbb{Z}_2 de la topologie discrète.

DÉMONSTRATION. (Voir [ABR]).

Exemples 2.53.

1. L'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x)$ est d'indice de stabilité 1, c'est donc un espace vérifiant la propriété de l'approximation forte, **SAP**.
2. Plus généralement, l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est d'indice de stabilité n .
3. Plus généralement encore, si K est le corps (formellement réel) de fonctions d'une variété algébrique V de dimension n sur un corps réel clos k , donc de degré de transcendance $\deg_{tr}(K : k) = n$, alors $st(X_K, G_K) = n$.
4. Si K est un corps (formellement réel) de fonctions, de degré de transcendance $\deg_{tr}(K : \mathbb{Q}) = n$, sur \mathbb{Q} (corps des nombres rationnels), alors $st(X_K, G_K) = n+1$ (penser à $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$).
5. Si k est un corps réel clos, alors les espaces d'ordres des corps $k((x, y))$ (des séries formelles de Laurent à deux variables) et $k((x))(y)$ (des fractions rationnelles à coefficients dans le corps des séries formelles de Laurent $k((x))$ à une variable) sont d'indice de stabilité 2 (voir [KMO] - Théorème 6.1).

11. Cette appellation signifie en anglais : **Strong Approximation Property**.

2.8.2 Longueur de chaîne

Définition 2.54 (LONGUEUR DE CHAÎNE). La *longueur de chaîne* d'un espace d'ordres abstrait (X, G) , notée $cl(X, G)$ ¹², est le plus grand entier naturel n tel qu'il existe des éléments $a_0, a_1, \dots, a_n \in G$ vérifiant ; $U(a_0) \subsetneq U(a_1) \subsetneq \dots \subsetneq U(a_n)$. Si un tel entier n n'existe pas, on convient de noter $cl(X, G) = \infty$.

REMARQUE 2.55.

Vu que pour tous éléments $a, b \in G$, on a l'équivalence :

$$U(a) \subsetneq U(b) \iff D(\langle 1, b \rangle) \subsetneq D(\langle 1, a \rangle).$$

On peut donc définir la longueur de chaîne de (X, G) comme étant le plus grand entier n tel qu'il existe des éléments $a_0, a_1, \dots, a_n \in G$ vérifiant :

$$D(\langle 1, a_0 \rangle) \subsetneq D(\langle 1, a_1 \rangle) \subsetneq \dots \subsetneq D(\langle 1, a_n \rangle)^{13}.$$

Définition 2.56 (ESPACE DE TYPE FINI). Un espace d'ordres d'ordres est dit de *type fini* s'il est combinaison finie d'opérations de sommes et d'extensions d'espaces d'ordres à partir de l'espace atomique.

On clôt la présente section par le théorème suivant, dit *théorème structurel*, apparu pour la première fois dans [ABR].

Théorème 2.57 (THÉORÈME STRUCTUREL). Soit (X, G) un espace d'ordres abstrait. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) (X, G) est de longueur de chaîne finie.
- ii) (X, G) est de type fini.

12. On gardera l'acronyme *cl*, communément utilisé par les spécialistes de la théorie des espaces d'ordres, et qui signifie *chain length*, en anglais.

13. Noter que dans une telle chaîne maximale, en tenant compte du fait que G soit réduit, on a nécessairement $a_0 = 1$ et $a_n = -1$.

3 Groupes Speciaux Réduits

Mots-clés : Structures relationnelles, groupes spéciaux, sous-groupe saturé, langage des groupes spéciaux, formes quadratiques abstraites, anneaux de Witt, annulation de Witt, saturation, morphismes de groupes spéciaux (réduits), isométrie des formes quadratiques, principe local-global de Pfister, théorème de Dualité, valuation (réelle), compatibilité d'un pré-ordre avec une valuation, théorème de Baer-Krull.

Références : [Ast1], [Dic], [DM], [Lir], [Hod].

Résumé

Dans la présente section, nous rappellerons succinctement les grandes lignes de la théorie des **Groupes Spéciaux (Réduits)**. La notion de Groupe Spécial (*special group*, en anglais) est apparue pour la première fois vers le début des années 90, suite aux travaux de M. Dickmann sur la possibilité d'une axiomatisation algébrique de la théorie des formes quadratiques en se basant sur la combinaison des technologies de premier ordre de la théorie des modèles et celles de l'algèbre abstraite.

La théorie des espaces d'ordres abstraits est dominée par son aspect topologique, contrairement à celle des groupes spéciaux, où l'algèbre et la théorie des modèles sont les maîtres d'art.

L'un des résultats les plus importants exposés dans [DM] est le théorème (3.19), dit de dualité, qui affirme que les deux classes d'objets **GSR** (groupes spéciaux réduits) et **EOA** (espaces d'ordres abstraits), munis de leurs morphismes respectifs, forment deux catégories équivalentes opposées, i.e., qu'il y a un **isomorphisme** entre les catégories¹⁴ **GSR** et **EOA**^{opp}, cette dernière est composée des mêmes objets que ceux de **EOA** mais avec des flèches (morphismes) inversées.

Nous nous contenterons dans ce qui suit de rappeler les notions de base de la théorie, notamment le langage des groupes spéciaux, l'axiomatisation de la théorie et verrons bien sûr quelques uns des résultats les plus élémentaires qui nous seront utiles dans la suite de cette Thèse.

On clora la section par rappeler le théorème de Baer-Krull, qui établit un lien entre les ordres et les valuations d'un corps.

3.1 Axiomatisation des groupes spéciaux

3.1.1 Langage des groupes spéciaux

Pour la construction des langages du premier ordre, le lecteur est référé à [Hod] ou [CK] ; il suffit de spécifier les symbole non-logique.

Définition 3.1 (LANGAGE DES GROUPES SPECIAUX). Le langage \mathcal{L}_{GS} des groupes spéciaux a comme symboles non-logiques les constantes 1, -1 , l'opération binaire " \cdot " (produit) et la relation quaternaire \equiv (isométrie de formes binaires).

Un *groupe spécial* est la donnée de :

1. Un groupe multiplicatif (G, \cdot) d'exposant 2 ($g^2 = 1, \forall g \in G$).
2. Deux éléments distingués de G , 1 pour l'élément neutre, et -1 , un élément distingué supplémentaire (qui peut coïncider avec l'élément neutre, dans le cas non réduit).
3. Une collection de relations $2n$ -aires \equiv_n sur G , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, construites récursivement à partir de la relation quaternaire \equiv , obéissant aux axiomes ci-après.

La notion de n -forme sur le groupe G est la même que dans le paragraphe #2.1.

14. On peut également parler de l'équivalence des catégories **GSR**^{opp} et **EOA**.

3.1.2 Axiomes des groupes spéciaux

Définition 3.2 (PRÉ-GROUPES SPÉCIAUX). Un *pré-groupe spécial* est un groupe multiplicatif (G, \cdot) d'exposant 2, ayant un élément distingué -1 , muni d'une relation quaternaire \equiv , telle que, pour tous éléments a, b, c et $d \in G$:

SG0) : \equiv est une relation d'équivalence sur G^2 .

SG1) : $\langle a, b \rangle \equiv \langle b, a \rangle$.

SG2) : $\langle a, -a \rangle \equiv \langle 1, -1 \rangle$.

SG3) : $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$ IMPLIQUE $a \cdot b = c \cdot d$.

SG4) : $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$ IMPLIQUE $\langle a, -c \rangle \equiv \langle -b, d \rangle$.

SG5) : $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$ IMPLIQUE $\langle x \cdot a, x \cdot b \rangle \equiv \langle x \cdot c, x \cdot d \rangle, \forall x \in G$.

Un tel pré-groupe spécial sera noté $(G, \cdot, \equiv, 1, -1)$, et si le contexte est clair, simplement par G .

Un pré-groupe spécial est dit *réduit*, si $1 \neq -1$, et de plus il vérifie l'axiome dit de *réduction* suivant :

RED) : $\forall a \in G, \langle a, a \rangle \equiv \langle 1, 1 \rangle \Rightarrow a = 1$

L'axiome (RED) est équivalent à :

RED') : $\forall a, b \in G, \langle a, b \rangle \equiv \langle 1, 1 \rangle \Rightarrow a = b = 1$

Définition 3.3 (DÉFINITION INDUCTIVE DE L'ISOMÉTRIE DE FORMES). Soit $(G, \cdot, 1, -1)$ un pré-groupe spécial. Les relations $2n$ -aires \equiv_n , d'isométrie de n -formes sont définies à partir de la relation quaternaire \equiv comme suit :

INIT) \equiv_1 est l'égalité dans G et \equiv_2 est la relation précédente \equiv de G^2 (définition (3.1))

REC) $\langle g_1, \dots, g_n \rangle \equiv_n \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ si, et seulement si, il existe des éléments $x, y, z_3, \dots, z_n \in G$ tel que $\langle g_1, x \rangle \equiv \langle h_1, y \rangle, \langle g_2, \dots, g_n \rangle \equiv_{n-1} \langle x, z_3, \dots, z_n \rangle$ et $\langle h_2, \dots, h_n \rangle \equiv_{n-1} \langle y, z_3, \dots, z_n \rangle$

Pour simplifier les notations, on utilisera le seul symbole \equiv .

Définition 3.4 (GROUPES SPÉCIAUX). Un *groupe spécial* est un pré-groupe spécial vérifiant, en plus des axiomes (SG0) à (SG5) :

SG6) : \equiv_3 est transitive

Cet axiome (SG6) est dit de *3-transitivité*.

Un *groupe spécial réduit* est un groupe spécial vérifiant l'axiome (RED).

Exemples 3.5.

1. **Groupes spéciaux de corps** : Le premier exemple de groupes spéciaux est celui des groupes spéciaux des corps formellement réels. Soit k un corps formellement réel (-1 n'est pas une somme de carrés). Considérons les sous-ensembles suivants de k : k^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de k , $(k^*)^2$ son sous-groupe des carrés de k^* , $\sum(k^*)^2$ le sous-groupe des sommes de ses carrés, et G_k le quotient $k^*/\sum(k^*)^2$. G_k est un groupe multiplicatif d'exposant 2 contenant les deux éléments distingués $\mathbf{1} = \overline{1}$ et $-\mathbf{1} = \overline{-1}$, classes respectives de 1 et -1 dans ce quotient G_k .

Si \equiv_k est la relation d'isométrie sur les formes quadratiques à coefficients (entrées) dans k (voir exemples 2.6 - (1), pour un équivalent pour les espaces d'ordres), alors on peut lui associer de façon naturelle une relation d'isométrie sur G_k qu'on notera \equiv_{G_k} , pour laquelle :

$$\forall a, b, c \text{ et } d \in k ; \quad \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \equiv_{G_k} \langle \overline{c}, \overline{d} \rangle \iff \langle a, b \rangle \equiv_k \langle c, d \rangle$$

Cette relation est bien définie et confère à G_k une structure de groupe spécial réduit.

REMARQUE 3.6.

On peut également construire des groupes spéciaux réduits par ce même procédé, en remplaçant $\sum(k^*)^2$ par un préordre propre de k . Ces groupes spéciaux correspondent aux quotients de G_k (voir paragraphe #3.3).

2. **L'isométrie triviale :** (Voir [DM] - Exemple 1.9). Soit G un groupe multiplicatif d'exposant 2, contenant un élément distingué $-1 \neq 1$. Alors il existe une structure de groupe spécial dite **isométrie triviale**, donnée par la relation \equiv_t suivante :

$$\forall a, b, c \text{ et } d \in G ; \quad \langle a, b \rangle \equiv_t \langle c, d \rangle \iff a \cdot b = c \cdot d$$

L'isométrie triviale est la plus faible relation permettant de munir un groupe d'exposant 2, avec un élément distingué -1 , d'une structure de groupe spécial. Un tel groupe spécial n'est jamais réduit !

3. **L'isométrie des éventails :** (Voir [DM] - Exemple 1.7) . Tout groupe multiplicatif G d'exposant 2 possédant un élément distingué $-1 \neq 1$ peut être muni d'une structure de groupe spécial dit **éventail**, à l'aide de la relation d'isométrie définie par :

$$\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle \iff ab = cd \text{ et } ac \in \{1, cd\}.$$

3.2 Anneau de Witt d'un groupe spécial

On note, au passage, que la construction de l'anneau de Witt d'un corps se généralise, mot par mot au cadre des groupes spéciaux.

Brièvement indiquée : Les opérations de somme directe \oplus , produit tensoriel \otimes ainsi que l'opération de produit scalaire \cdot sont bien définies (de la manière habituelle, voir ([DM]) par exemple) sur l'ensemble $Form(G)$ des formes (suites finies) sur un groupe spécial G , et préservant l'isométrie (voir [DM] - Proposition 1.6 (a)).

La validité du théorème d'annulation de Witt (voir [DM] - Proposition 1.6 (b)) permet alors de définir de la manière habituelle l'équivalence de Witt (notée \sim) sur $Form(G)$ et prouver que \oplus et \otimes la préservent.

Le quotient $Form(G)/\sim$, avec les opérations induites (et les formes $\langle 1 \rangle$ et $\langle \rangle$ (vide) comme étant l'unité 1 et élément neutre 0) devient alors un anneau commutatif, appelé l'**anneau de Witt de G** , et noté $W(G)$.

3.3 Saturation, formes et quotients de Pfister

Les formes de Pfister occupent une place très importante dans la théorie des formes quadratiques sur les groupes spéciaux.

3.3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.7 (FORME DE PFISTER). Soit G un groupe spécial (réduit).

1. On appelle **forme de Pfister** toute forme qui s'écrit $\langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle := \bigotimes_{i=1}^{i=n} \langle 1, a_i \rangle$, où les a_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) sont des éléments de G .
2. L'entier n est dit **degré** de la forme de Pfister.
3. La dimension de cette est l'entier 2^n .

REMARQUE 3.8.

1. Le produit de deux formes de Pfister en est une :

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \otimes \langle\langle b_1, \dots, b_m \rangle\rangle = \langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle\rangle$$

2. Ceci n'est pas le cas d'une somme, en général.

Proposition 3.9. Soit ϕ une forme de Pfister, alors :

- i) ϕ est isotrope $\iff \phi$ est universelle $\iff \phi$ est hyperbolique.
- ii) $D(\phi) = \{g \in G; g \cdot \phi \equiv \phi\}$, et en particulier, $D(\phi)$ est un sous-groupe de G .
- iii) $\forall a \in G, a \in D(\phi) \implies D(1, a) \subset D(\phi)$.

DÉMONSTRATION. (Voir [DM].)

Définition 3.10 (SATURATION). Soient G un groupe spécial et Δ un sous-groupe de G . On dit que Δ est un **sous-groupe saturé** de G s'il vérifie :

$$\forall a \in G, a \in \Delta \implies D(1, a) \subset \Delta.$$

Un sous-groupe saturé Δ de G est dit **propre** s'il est différent de G .

Corollaire 3.11. L'ensemble des valeurs d'une forme de Pfister à coefficients dans un groupe spécial réduit G est un sous-groupe saturé de G .

Un autre cas de sous-groupe saturé est donné par les noyaux des SG -morphisms à valeurs dans un groupe spécial réduit (voir définition (3.20)). Plus précisément, on a ;

Proposition 3.12. Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes spéciaux réduits. Alors :

$$\forall a \in \ker(f), D(1, a) \subset \ker(f).$$

Cas particuliers Soit $(G, \cdot, 1, -1)$ un groupe spécial réduit.

1. Si Δ un sous-groupe saturé de G , alors :

$$-1 \in \Delta \iff \Delta = G$$

2. Les sous-groupes $\{1\}$ et G (de G) sont saturés dans G (par l'axiome de réduction). Ces derniers sont les sous-groupes saturés **triviaux** de G .

Fait 3.13.

- i) Toute intersection (finie ou non) de sous-groupes saturés est un sous-groupe saturé.
- ii) Si $(\Delta_i)_{i \in I}$ est une chaîne de sous-groupes saturés (par inclusion ensembliste) d'un groupe spécial réduit G , alors la réunion $\bigcup_{i \in I} \Delta_i$ est également un sous-groupe saturé de G .

Corollaire 3.14 (LA SATURATION COMME OPÉRATION). Tout sous-ensemble Δ d'un groupe spécial G est contenu dans un sous-groupe saturé, minimal parmi les sous-groupes saturés contenant Δ .

NOTATION 3.15.

On note un tel sous-groupe par $\Delta^{(sat)}$ et on l'appelle **le sous-groupe saturé de G engendré par Δ** .

Les notions de forme de Pfister et de saturation sont profondément liées, et la proposition suivante en témoigne de ce lien.

Proposition 3.16. Soient ϕ et ψ deux formes de Pfister sur G . Alors :

$$D(\phi \otimes \psi) = (D(\phi) \cdot D(\psi))^{(sat)}.$$

3.3.2 Construction de sous-groupes saturés

On dispose désormais de deux exemples de sous groupes saturés :

1. Les noyaux (kernels) des SG –morphismes.
2. Les groupes de valeurs des formes de Pfister.

Voici un moyen de construire de certains sous-groupes saturés d'un groupe spécial.

Proposition 3.17. *Soit ϕ une forme à coefficients dans un groupe spécial réduit G . Alors l'ensemble :*

$$\phi^{(sat)} = \{a \in G ; a \cdot \phi \equiv \phi\},$$

est un sous-groupe saturé de G .

DÉMONSTRATION.

- Il est clair que $\phi^{(sat)}$ est un sous-groupe de G .
- Pour la saturation, soit $a \in \phi^{(sat)}$ et $b \in D(1, a)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \langle b, b \cdot a \rangle &\equiv \langle 1, a \rangle \\ \implies \langle b, b \cdot a \rangle \otimes \phi &\equiv \langle 1, a \rangle \otimes \phi \\ \implies b \cdot \phi \oplus b \cdot (a \cdot \phi) &\equiv \phi \oplus (a \cdot \phi) \\ \implies b \cdot \phi \oplus b \cdot \phi &\equiv \phi \oplus \phi \\ \implies 2 \cdot (b \cdot \phi) &\equiv 2 \cdot \phi \\ \implies b \cdot \phi &\equiv \phi \end{aligned}$$

Il s'en suit de la proposition (3.9) que $b \in \phi^{(sat)}$; par conséquent $\phi^{(sat)}$ est un sous-groupe saturé de G .

Définition 3.18 (QUOTIENTS DE GROUPES SPÉCIAUX). Si Δ est un sous-groupe saturé d'un groupe spécial réduit G , alors le quotient G/Δ , muni de la multiplication induite (et des classes des éléments 1 et -1) est un groupe spécial réduit. Il est dit un **groupe quotient** de G .

REMARQUE 3.19.

Sans la condition de saturation de Δ , ce quotient n'est jamais un groupe spécial.

3.4 Morphismes de groupes spéciaux

Définition 3.20 (SG –MORPHISME).

1. Un **morphisme de groupes spéciaux**, dit aussi un **SG –morphisme**, est un morphisme de groupes multiplicatifs préservant la structure de groupe spécial (éléments distingués, opérations, relations d'isométrie), plus précisément, on a :

$$f : (G, \equiv_G, \cdot, 1_G, -1_G) \longrightarrow (H, \equiv_H, \cdot, 1_H, -1_H),$$

est un SG –morphisme si :

- (a) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, $\forall (a, b) \in G^2$.
- (b) $f(1_G) = 1_H$ et $f(-1_G) = -1_H$.
- (c) $\langle a, b \rangle \equiv_G \langle c, d \rangle \implies \langle f(a), f(b) \rangle \equiv_H \langle f(c), f(d) \rangle$, $\forall (a, b, c, d) \in G^4$.
- (d) $a \in D_G(1, b) \implies f(a) \in D_H(1, f(b))$.

Note : Sous les conditions (a) et (b), les assertions (c) et (d) sont équivalentes.

2. Un **monomorphisme** (resp. **épimorphisme**) de groupes spéciaux est un SG -morphisme injectif (resp. surjectif).
3. Un SG -morphisme $f : G \rightarrow H$ est dit **isomorphisme** de groupes spéciaux s'il existe un SG -morphisme $g : H \rightarrow G$ vérifiant $f \circ g = Id_H$ et $g \circ f = Id_G$. Le morphisme g est noté comme de coutume f^{-1} .
4. Un **endomorphisme** (resp. **automorphisme**) de groupes spéciaux est un SG -morphisme (resp. isomorphisme) d'un groupe spécial G à valeurs dans lui-même.

REMARQUE 3.21.

1. Un SG -morphisme qui est à la fois un monomorphisme et épimorphisme (i.e., bijectif) n'est pas forcément un isomorphisme. Pour l'être il faudra que son inverse soit aussi un SG -morphisme, i.e., l'implication de la condition du point (1.(c)) de la définition (3.20) doit être remplacée par une équivalence.
2. Les SG -morphisms qui ont cette propriété pour les formes de toute dimension, sont dit des **plongements complets** (voir [DM] - p. 75).

Exemple 3.22. Soit (G, \equiv) un groupe spécial muni d'une relation d'isométrie non triviale, i.e. ; $\equiv \neq \equiv_t$ (ceci exclut le cas où $G = \mathbb{Z}_2$). Alors l'application identité :

$$Id_G : (G, \equiv) \longrightarrow (G, \equiv_t),$$

est à la fois un SG -morphisme et un isomorphisme de groupes, mais jamais un isomorphisme de groupes spéciaux.

Fait 3.23 (COMPOSITION DE SG -MORPHISMES). *Le composé de deux SG -morphisms en est un.*

REMARQUE 3.24.

Pour tout groupe spécial réduit G , il existe un, et un seul, SG -morphisme :

$$\tau : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow G,$$

où \mathbb{Z}_2 est muni de son unique structure de groupe spécial. Ce morphisme envoie 1 et -1 de \mathbb{Z}_2 sur 1 et -1 de G , respectivement.

Corollaire 3.25. *La collection composée de :*

Objets : Groupes spéciaux (réduits).

Morphismes : SG -morphisms.

forme une catégorie dite des **groupes spéciaux (réduits)**, notée $\mathcal{GS}(\mathcal{R})$.

Définition 3.26 (MORPHISMES ET FORMES (IMAGE DIRECTE)). On se donne deux groupes spéciaux (réduits) (G, \equiv) et (H, \equiv) , un SG -morphisme $f : G \longrightarrow H$ et une forme à coefficients dans G , $\Phi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$; alors l'**image directe** de Φ par f , la forme $\langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$ à coefficients dans H , est notée $f \star \Phi$.

Proposition 3.27. *Pour tout SG -morphisme :*

$$f : (G, \equiv_G, \cdot, 1, -1) \longrightarrow (H, \equiv_H, \cdot, 1, -1),$$

toutes formes $\Phi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ et $\Psi = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ à coefficients dans G et tout élément $a \in G$, on a :

$$i) \quad f \star \langle \rangle = \langle \rangle \text{ et } f \star \langle 1_G \rangle = \langle 1_H \rangle.$$

$$ii) \quad \text{Si } \Phi \equiv_G \Psi, \text{ alors } (f \star \Phi) \equiv_H (f \star \Psi).$$

- iii) $f \star (\Phi \oplus \Psi) = (f \star \Phi) \oplus (f \star \Psi).$
- iv) $f \star (a \cdot \Phi) = f(a) \cdot (f \star \Phi).$
- v) $f \star (\Phi \otimes \Psi) = (f \star \Phi) \otimes (f \star \Psi).$

DÉMONSTRATION. Vérification directe.

Corollaire 3.28. *L'application $f \star : W(G) \longrightarrow W(H)$ est un morphisme d'anneaux.*

Proposition 3.29 (CARACTÉRISATION DES SG -MORPHISMES). *On se donne deux groupes spéciaux réduits (G, \equiv) et (H, \equiv) et un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow H$ tel que $f(-1) = -1$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) f est un SG -morphisme.
- ii) $\forall a, b \in G ; f(D(a, b)) \subset D(f(a), f(b)).$
- iii) $\forall a \in G ; f(D(1, a)) \subset D(1, f(a)).$
- iv) $\forall \Phi \in \text{Form}(G) ; f(D(\Phi)) \subset D(f \star \Phi).$
- v) $\forall a \in \ker(f), D(1, a) \subset \ker(f).$

DÉMONSTRATION. (Voir [DM]).

Le point (v) de la proposition (3.29) constitue par ailleurs la définition des ordres sur un groupe spécial donné. Plus précisément, on a :

Définition 3.30 ([DM] OU [MAR9]). Un caractère $\sigma : G \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ est un ordre de G , i.e., morphisme de groupes spéciaux si, et seulement si, $\sigma(-1) = -1$ et :

$$\forall a \in \text{Ker}(\sigma), D(1, a) \subset \text{Ker}(\sigma).$$

Exemples 3.31.

1. Tout sous-groupe Δ de G , contenant -1 , est muni naturellement d'une structure de groupe spécial si, et seulement si, l'isométrie sur G des 2-formes à paramètres dans Δ entraîne l'isométrie sur Δ , en restreignant l'opération de multiplication ainsi que les relation $2n$ -aires d'isométrie des n -formes, de G à Δ .
Le plongement $i : \Delta \hookrightarrow G$, envoyant tout élément $\delta \in \Delta$ sur lui-même, est un monomorphisme de groupes spéciaux.
2. Soient (G, \equiv) un groupe spécial et Δ un sous-groupe saturé de G (définition (3.10)).
L'application :

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/\Delta \\ g &\longmapsto \pi(g) = \bar{g} := g \cdot \Delta, \end{aligned}$$

est un épimorphisme de groupes spéciaux, dit **projection canonique** de G sur le quotient G/Δ .

3.5 Théorème de dualité

Nous rappellerons, dans le présent paragraphe, l'un des résultats les plus importants de la théorie des groupes spéciaux, l'établissement d'une correspondance catégorique dite **théorème de dualité**, entre la catégorie des espaces d'ordres abstraits et celle des groupes spéciaux réduits.

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [DM] - Proposition 3.10 et Proposition 3.11, p.52, ainsi que Théorème 3.19, p.57.

Définition 3.32. Soit $(G, \cdot, 1, -1, \equiv)$ un groupe spécial réduit.

On pose, par définition, $X_G := \text{Hom}_{GS}(G, \mathbb{Z}_2)$, l'ensemble des morphismes de groupes spéciaux de G à valeurs dans \mathbb{Z}_2 , ce dernier étant muni de son *unique* structure de groupe spécial réduit, et on associe au groupe spécial $(G, \cdot, 1, -1, \equiv)$ le couple (X_G, G) . La correspondance $G \mapsto (X_G, G)$ sera notée par Π .

Ainsi défini, X_G possède une structure d'*espace topologique*, trace de la topologie de Harrison sur $\chi(G)$.

Voici quelques propriétés structurelles de X_G et de G .

Proposition 3.33.

- i) X_G est fermé comme sous espace topologique, à la fois de $\chi(G)$ et de \mathbb{Z}_2^G .
- ii) X_G est un espace booléen (compact, Hausdorff et totalement disconnexe).
- iii) G est un sous-groupe du groupe des applications continues $X_G \rightarrow \mathbb{Z}_2$.
- iv) G sépare les points de X_G .
- v) $\forall \sigma \in X_G ; \sigma(-1_G) = -1_{\mathbb{Z}_2}$.

DÉMONSTRATION. (Voir [DM] ou [Lir]).

Une conséquence directe de cette proposition est :

Corollaire 3.34. Le couple (X_G, G) est un pré-espace d'ordres, i.e., il vérifie les axiomes (\mathcal{O}_1) , (\mathcal{O}_2) et (\mathcal{O}_3) (voir définition (2.1)).

Le couple (X_G, G) est également un espace d'ordres abstrait, i.e., il vérifie l'axiome (\mathcal{O}_4) (voir proposition (3.37)).

Les propositions suivantes peuvent être trouvées dans [DM], [Lir] ou [Mar9], par exemple.

Proposition 3.35. Soient $\phi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ une forme de dimension n sur X_G et g un élément de G . On a donc équivalence entre les assertions suivantes :

- i) $g \in D_{X_G}(\phi)$, i.e., $\exists g_2, \dots, g_n \in G$ tels que $\phi \equiv \langle g, g_2, \dots, g_n \rangle$.
- ii) $\exists a \in D(\langle a_2, \dots, a_n \rangle)$ tel que $g \in D(\langle a_1, a \rangle)$ (voir paragraphe 2.1).

Proposition 3.36 (PRINCIPE LOCAL-GLOBAL D'ISOMÉTRIE DE PFISTER). Soient $(G, \cdot, 1, -1, \equiv)$ un groupe spécial réduit, X_G l'ensemble défini plus haut, ϕ et ψ deux formes sur X_G . On a équivalence entre :

- i) $\phi \equiv \psi$.
- ii) $\forall \sigma \in X_G ; \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$ et $\dim(\phi) = \dim(\psi)$.

Proposition 3.37 (VÉRIFICATION DE L'AXIOME (\mathcal{O}_4) PAR (X_G, G)). Pour toutes formes ϕ et ψ sur X_G et tout élément $a \in G$, on a :

$$a \in D(\phi \oplus \psi) \implies \exists c \in D(\phi) \text{ et } d \in D(\psi) \text{ tels que } a \in D(c, d).$$

Cette proposition dit simplement que le couple (X_G, G) vérifie l'axiome (\mathcal{O}_4) des espaces d'ordres, d'où le corollaire :

Corollaire 3.38. Le couple (X_G, G) est un espace d'ordres abstrait.

Proposition 3.39. Si $f : (G, \cdot, 1, -1, \equiv) \longrightarrow (G', \cdot, 1, -1, \equiv')$ est un morphisme de groupes spéciaux, alors l'application :

$$\begin{aligned} \Pi(f) : (X_{G'}, G') &\longrightarrow (X_G, G) \\ \sigma &\longmapsto \Pi(f)(\sigma) = \sigma \circ f, \end{aligned}$$

est un morphisme d'espaces d'ordres.

Corollaire 3.40. La transformée Π est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes spéciaux réduits vers celle des espaces d'ordres abstraits.

La réciproque : A tout espace d'ordres abstrait (X, G) , on peut associer de façon naturelle un groupe spécial réduit $\Gamma(X, G) := (G_X, \cdot, 1, -1, \equiv_X)$, via une application qu'on notera par Γ , où $G_X := G$ et $1, -1 \in G$ sont les éléments distingués de G_X . L'isométrie des n -formes sur G_X , notée \equiv_X , est définie comme suit :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et toutes n -formes $\phi, \psi \in \text{Form}_n(G)$, avec $\dim(\phi) = \dim(\psi)$:

$$\phi \equiv_X \psi \iff \forall \sigma \in X, \sigma(\phi) = \sigma(\psi).$$

Théorème 3.41. $(G_X, \cdot, 1, -1, \equiv_X) := \Gamma(X, G)$ est un groupe spécial réduit.

DÉMONSTRATION. (Voir [DM], pour une preuve complète).

Proposition 3.42. Si $\alpha : (X, G) \longrightarrow (X', G')$ est un morphisme d'espaces d'ordres abstraits, alors l'application :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) : (G_{X'}, \cdot, 1, -1, \equiv_{X'}) &\longrightarrow (G_X, \cdot, 1, -1, \equiv_X) \\ g &\longmapsto \Gamma(\alpha)(g) = g \circ \alpha, \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes spéciaux (réduits).

Corollaire 3.43. La transformée Γ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces d'ordres abstraits vers celle des groupes spéciaux réduits.

Théorème 3.44 (THÉORÈME DE DUALITÉ).

i) Pour tout espace d'ordres (X, G) , on a :

$$\Pi \circ \Gamma(X, G) := (X_{G_X}, G_{G_X}) = (X, G),$$

c'est-à-dire que $\Pi \circ \Gamma = \text{Id}_{\mathbf{EOA}}$.

ii) Pour tout groupe spécial $(G, \cdot, 1, -1, \equiv)$, on a :

$$\Gamma \circ \Pi(G, \cdot, 1, -1, \equiv) := (G_{X_G}, \cdot, 1, -1, \equiv_{X_G}) = (G, \cdot, 1, -1, \equiv),$$

c'est-à-dire que $\Gamma \circ \Pi = \text{Id}_{\mathbf{GSR}}$.

Corollaire 3.45. Les catégories des espaces d'ordres abstraits (**EOA**) et celle des groupes spéciaux réduits (**GSR**) sont isomorphes (équivalentes) et opposées.

3.6 Théorème de Baer-Krull

On conclut cette section par rappeler un des théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces d'ordres qui met en évidence le lien entre les ordres et les valuations d'un corps formellement réel.

Pour les définitions et notations utilisées dans ce paragraphe (valuation et anneau de valuation, idéal maximal, corps résiduel...), le lecteur pourra consulter à titre indicatif [Lam2] ou [EP], ainsi que toute référence traitant de la théorie des valuations sur les corps (formellement réels).

Définitions 3.46 (COMPATIBILITÉ : ORDRES - VALUATIONS). Soient k un corps formellement réel, $\sigma \in X_k$ un ordre (où \leq est la relation d'ordre total associée) et $\nu : k \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ une valuation réelle sur k .

1. ν est dite **compatible** avec σ , si :

$$\forall a, b \in k ; 0 < a \leq b \iff \nu(a) \geq \nu(b).$$

2. Un sous-ensemble (non vide) $E \subset k$ est dit **convexe** dans (k, σ) , si :

$$\forall a, b \in k ; 0 \leq a \leq b \text{ et } b \in E \implies a \in E.$$

Proposition 3.47 (CARACTÉRISATION DE LA COMPATIBILITÉ). Avec les notations précédentes, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) ν est compatible avec σ .
- ii) L'anneau \mathcal{A}_ν de la valuation ν est convexe dans (k, σ) .
- iii) L'idéal maximal \mathcal{M}_ν de \mathcal{A}_ν est convexe dans (k, σ) .
- iv) $\forall a \in k ; a \geq 0 \text{ et } a \in \mathcal{M}_\nu \implies a < 1$.

NOTATIONS 3.48.

On pose les notations suivantes :

X_ν : Le sous-ensemble de X_k des ordres compatibles avec la valuation ν .

G_ν : L'ensemble des restrictions à X_ν des éléments de G , vus comme applications de X_k dans \mathbb{Z}_2 , i.e., $G_\nu := G/X_\nu^\perp$.

Théorème 3.49 (BAER-KRULL).

- i) Le couple (X_ν, G_ν) est un sous-espace d'ordres de (X_k, G_k) .
- ii) (X_ν, G_ν) est isomorphe, en tant qu'espace d'ordres, à une extension de l'espace d'ordres $(X_{\mathcal{K}_\nu}, G_{\mathcal{K}_\nu})$ du corps résiduel \mathcal{K}_ν . Plus précisément, on a :

$$(X_\nu, G_\nu) \simeq (X_{\mathcal{K}_\nu}, G_{\mathcal{K}_\nu})[\nu(\Gamma)/2\nu(\Gamma)],$$

où $\nu(\Gamma)/2\nu(\Gamma)$, vu comme quotient multiplicatif, est un groupe d'exposant 2.

DÉMONSTRATION. (Voir [DM] - Théorème 1.33 (version pour les groupes spéciaux) ou [Mar15] - sections §1.5 et §5.3 (version pour les espaces d'ordres sur les corps)).

Deuxième partie

Sur les ordres de $\mathbb{R}(x, y)$

Sommaire

4	Ordres et ultrafiltres : Correspondance de Brumfiel	32
4.1	Filtres et ultrafiltres : Généralités	32
4.1.1	Filtres	32
4.1.2	Ultrafiltres	33
4.1.3	Applications et exemples	34
4.2	Ordres et ultrafiltres : Cas des variétés algébriques réelles	35
4.2.1	Topologie des semi-algébriques réguliers	35
4.2.2	Théorème de " <i>Correspondance</i> " de Brumfiel	37
5	Ordres et demi-branches	43
5.1	Espace projectif et projectifié d'un ensemble	43
5.2	Demi-branches et germes topologiques	43
5.3	Demi-Branches Algébriques Signées	46
5.3.1	Décomposition cellulaire	46
5.3.2	Drapeaux	46
5.3.3	Demi-branches algébriques signées	48
5.4	Demi-Branches Pseudo-Algébriques	48
5.5	Demi-branches de Bézout	49
5.6	Correspondance : Demi-Branches de Bézout-Ultrafiltres-Ordres	50
5.7	Un mot sur les éventails de $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$	51

4 Ordres et ultrafiltres : Correspondance de Brumfiel

Mots-clés : Variétés algébriques réelles, ordres sur les corps de fonctions, filtres et ultrafiltres, topologie des ouverts réguliers, correspondance de Brumfiel.

Références : [ABR], [BCR] (Chap. 7), [Bru], [Rui1].

Résumé

L'objet de cette section est d'établir une correspondance bijective entre l'ensemble des **ordres** du corps de fonctions d'une variété algébrique réelle V et une famille particulière d'**ultrafiltres**, dits de **rang maximal**, de l'algèbre de Boole de ses sous-ensembles semi-algébriques. Cette correspondance sera baptisée **correspondance de Brumfiel** (voir théorème (4.32), en hommage au mathématicien G.W. Brumfiel (voir [Bru]) dont il est l'auteur.

Brumfiel ne parle pas de filtres et d'ultrafiltres de rang maximal, mais il en fait l'usage de manière implicite.

Dans la première partie de cette section, nous rappellerons les notions de base de la théorie des ultrafiltres afin de faciliter la lecture de la seconde partie, qui elle, sera consacrée, dans un premier temps, à rappeler quelques propriétés de la topologie des semi-algébriques sur une variété réelle, ensuite à établir la correspondance de Brumfiel, en choisissant une nouvelle base de topologie, dite des **ouverts basiques réguliers**.

Les propositions (4.38) et (4.40) constituent la passerelle entre les ordres et les ultrafiltres de rang maximal, mais elles sont énoncées pour couvrir une correspondance plus générale, entre les **filtres de rang maximal** et les **ordres partiels**. La clé qui permet ce passage est le lemme (4.23), décrivant une propriété propre aux ouverts basiques réguliers que n'ont pas les ouverts basiques classiques.

4.1 Filtres et ultrafiltres : Généralités

4.1.1 Filtres

Définitions 4.1 (FILTRE ET PRÉFILTRE). Soit $(X, <)$ un ensemble non vide partiellement ordonné.

Un **préfiltre**¹⁵ de X est un sous-ensemble $\mathcal{P} \subset X$ vérifiant les conditions suivantes ;

(F0) \mathcal{P} est non vide.

(F1) $\forall x, y \in \mathcal{P}, \exists z \in \mathcal{P}$ tel que $z < x$ et $z < y$.

\mathcal{P} est dit un **filtre** si, de plus, il vérifie :

(F2) $\forall x \in \mathcal{P}, y \in X ; x < y \implies y \in \mathcal{P}$.

Un (pré)filtre \mathcal{P} est dit **propre** s'il est différent de X .

Définition 4.2 (RAFFINEMENT DE (PRÉ)FILTRES). Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux (pré)filtres.

On dit que \mathcal{P} est **plus fin** que \mathcal{P}' , ou que \mathcal{P} est un **raffinement** de \mathcal{P}' , si tout élément de \mathcal{P}' est un élément de \mathcal{P} , i.e., $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.

La relation de *raffinement* est un ordre partiel sur l'ensemble des (pré)filtres de X .

NOTATION 4.3.

On utilisera la lettre \mathcal{P} pour noter un préfiltre et la lettre \mathcal{F} pour un filtre.

Fait 4.4 (ENGENDREMENT DE FILTRES). Tout préfiltre \mathcal{P} est contenu dans un filtre, minimal pour l'inclusion, appelé **filtre engendré par \mathcal{P}** et noté $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Dans ce cas, on dit que \mathcal{P} est une **base de filtre** de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

15. On dit aussi *ensemble dirigé supérieurement*.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre pour $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ le sous-ensemble des éléments $x \in X$ pour lesquels il existe un élément $p \in \mathcal{P}$ vérifiant $p < x$, et l'axiome **(F2)** suit.

Exemple 4.5 ((PRÉ)FILTRE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE). Soit maintenant E un ensemble non vide, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et X une sous-algèbre de Boole non vide de $\mathcal{P}(E)$, i.e., stable par *intersection*, *union*, et *passage au complémentaire* et munie de l'ordre de l'inclusion ensembliste. (X, \subset) est ainsi un ensemble partiellement ordonné.

Un **préfiltre sur** E (i.e., de X) est un sous-ensemble $\mathcal{P} \subset X$ vérifiant les conditions suivantes :

(F0) \mathcal{P} est non vide.

(F1) $\forall A, B \in \mathcal{P}$, alors $A \cap B \in \mathcal{P}$.

Noter que cette condition est plus forte que **(F1)** de la définition (4.1).

\mathcal{P} est dit **propre**, si :

(F1') $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

Un préfiltre \mathcal{P} est un **filtre**, si de plus, il vérifie :

(F2) $\forall A \in \mathcal{P}, \forall B \in X; A \subset B \implies B \in \mathcal{P}$.

Un (pré)filtre \mathcal{P} sur E est dit **principal**, s'il contient un élément minimal non vide M , c'est-à-dire, $\exists M \in \mathcal{P}, \forall A \in \mathcal{P}, M \subset A$.

M est dit **élément principal** ou bien **centre** de \mathcal{P} . Dans ce cas, \mathcal{P} consiste en tous les éléments de X contenant M (par **(F2)**), i.e., $\{M\}$ est une base de filtre de \mathcal{P} .

Fait 4.6. Soient X un ensemble partiellement ordonné, que nous supposons **inductif**, i.e., toute suite croissante d'éléments de X admet un élément maximal, et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une chaîne (penser à une suite croissante) de filtres propres de X , dirigée supérieurement par l'inclusion. Alors la limite ; $\mathcal{F} := \lim_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, est également un filtre propre.

4.1.2 Ultrafiltres

Définition 4.7. Soit $(X, <)$ un ensemble non vide partiellement ordonné, et \mathcal{F} un sous-ensemble de X . On dit que \mathcal{F} est un **ultrafiltre** de X , si \mathcal{F} est un filtre maximal (pour la relation de raffinement).

Théorème 4.8 (CARACTÉRISATION DES ULTRAFILTRES). Soient E un ensemble non vide, $X \subset \mathcal{P}(E)$ une sous-algèbre de l'algèbre de Boole des parties de E et \mathcal{F} un filtre de X . Les assertions suivantes sont donc équivalentes :

i) **(F3)** : \mathcal{F} est un ultrafiltre (maximal parmi les filtres propres de X).

ii) **(F3')** : $\forall A \in X; (A \in \mathcal{F}) \text{ XOU } (\overline{A} \in \mathcal{F})$ ¹⁶.

iii) **(F3'')** : $\forall A, B \in X; A \cup B \in \mathcal{F} \implies A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F}$.

Note : "**XOU**" désigne la **disjonction exclusive**.

Lemme 4.9. Dans le cas où $X = \mathcal{P}(E)$, si \mathcal{F} est un ultrafiltre de X , centré en $A \subset E$, alors A est réduit à un point.

DÉMONSTRATION. En effet, si A possède plus d'un élément de E , disons $a \neq b \in A$, il suffit de prendre un sous-ensemble A' de A contenant a mais pas b et son complémentaire $\overline{A'}$ qui contient b mais pas a . D'après l'axiome **(F3')** des ultrafiltres (voir théorème (4.8)), l'un seulement de ces deux ensembles est un élément de \mathcal{F} . Mais aucun de ces ensembles ne contient A , ce qui contredit le fait que A soit un centre pour \mathcal{F} .

16. Pour simplifier les notations, on note par \overline{A} le complémentaire de A dans E , au lieu de $E \setminus A$.

4.1.3 Applications et exemples

Exemples 4.10.

1. Soit E un ensemble non vide, $A \subset E$ un sous-ensemble non vide de celui-ci et $X := \mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Alors l'ensemble \mathcal{F} de toutes les éléments de X contenant A est un filtre. C'est un filtre principal ayant A comme centre.
2. **Le filtre de Fréchet :** $E = \mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathcal{F}_{\text{Fréchet}}$ composé de toutes les parties de \mathbb{N} , complémentaires des sous ensembles finis de \mathbb{N} , est un filtre. Il est appelé *filtre de Fréchet*. Ce filtre est engendré par la base de filtre $\sigma(\mathbb{N})$, constituée des **segments terminaux** ; $S_k = \{i \in \mathbb{N}, i \geq k\}$.

On conclut ce paragraphe par un exemple décrivant une des représentations géométriques possibles des ordres du corps $\mathbb{R}(x)$.

Exemple 4.11 (ULTRAFILTRES SUR \mathbb{R} ET ORDRES DE $\mathbb{R}(x)$). Soit $E := \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $X := SA(\mathbb{R})$ l'algèbre de Boole de ses parties semi-algébriques. Considérons la collection de tous les intervalles de la forme $]0, \frac{1}{n}[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ qu'on note par \mathcal{P}_0^+ . Il n'est pas difficile de voir que \mathcal{P}_0^+ est un préfiltre de X .

On définit \mathcal{F}_0^+ comme étant la collection de tous les éléments de X contenant un élément de \mathcal{P}_0^+ . Alors \mathcal{F}_0^+ est un ultrafiltre de X .

Notons par $\sigma(\mathcal{F}_0^+)$ l'ensemble de toutes les fractions $f \in \mathbb{R}(x)$, positives sur un élément de \mathcal{F}_0^+ . Alors $\sigma(\mathcal{F}_0^+)$ est un ordre sur $\mathbb{R}(x)$.

De façon plus générale, pour tout $r \in \mathbb{R}$, on définit \mathcal{P}_r^+ comme étant l'ensemble des intervalles de la forme $]r, r + \frac{1}{n}[$, et \mathcal{P}_r^- celui des intervalles de la forme $]r - \frac{1}{n}, r[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On leur associe, respectivement, les ensembles \mathcal{F}_r^+ et \mathcal{F}_r^- des parties semi-algébriques de \mathbb{R} (unions finies d'intervalles) contenant, respectivement, un élément de \mathcal{P}_r^+ et un élément de \mathcal{P}_r^- . Les ensembles \mathcal{F}_r^+ et \mathcal{F}_r^- sont des ultrafiltres de X .

Enfin, notons par \mathcal{P}_∞^- l'ensemble composé des intervalles $] -\infty, n[$ et par \mathcal{P}_∞^+ celui composé des intervalles $]n, +\infty[$, avec $n \in \mathbb{N}$, et par \mathcal{F}_∞^- et \mathcal{F}_∞^+ les ensembles composés des parties semi-algébriques de \mathbb{R} contenant un élément de \mathcal{P}_∞^- et de \mathcal{P}_∞^+ , respectivement. \mathcal{F}_∞^- et \mathcal{F}_∞^+ sont également des ultrafiltres de l'algèbre de Boole des semi-algébriques de \mathbb{R} .

Chacun des ultrafiltres \mathcal{F}_r^+ , \mathcal{F}_r^- ($\forall r \in \mathbb{R}$), \mathcal{F}_∞^- et \mathcal{F}_∞^+ donne lieu à un unique ordre de $\mathbb{R}(x)$, composé chacun des fractions $f \in \mathbb{R}(x)$ positives sur un élément de l'ultrafiltre associé. De plus, il y a une correspondance bijective entre ces ultrafiltres avec les ordres du corps $\mathbb{R}(x)$.

REMARQUE 4.12.

1. L'équivalent de cet exemple en dimension supérieure, i.e., cas des algèbres de Boole des semi-algébriques de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) ou d'une variété algébrique réelle affine quelconque est beaucoup moins intuitif et c'est l'objet de ce qui suivra.
2. Dans le cas où $n = 2$, quelques éléments descriptifs des ordres de $\mathbb{R}(x, y)$, et donc des ultrafiltres de l'algèbre de Boole des semi-algébriques de \mathbb{R}^2 , seront donnés dans la suite de cette section ainsi que dans la section §5 ci-après. Les références principales pour le traitement de ce cas particulier sont les articles [AGR1] et [AGR2], d'Alonso, Gamboa et Ruiz.

4.2 Ordres et ultrafiltres : Cas des variétés algébriques réelles

4.2.1 Topologie des semi-algébriques réguliers

Soit V une variété irréductible réelle (sur \mathbb{R}), de dimension $d \in \mathbb{N}^*$, que nous supposons affine, A son anneau (intègre) des fonctions régulières et K son corps de fonctions, *i.e.*, le corps de fractions de A . Posons $A^* := A \setminus \{0\}$ (qui diffère de A^\times , groupe des unités de A). Notons, par ailleurs, par $SA(V)$ l'algèbre de Boole des sous-ensembles semi-algébriques de V .

Définition 4.13. Un sous-ensemble semi-algébrique de V est dit un **ouvert basique (usuel)** s'il est de la forme :

$$U(f_1, \dots, f_n) := \{v \in V, f_1(v) > 0, \dots, f_n(v) > 0\},$$

où $f_i \in A$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, sont des **générateurs** de U .

Proposition 4.14 (THÉORÈME DE FINITUDE). *Tout ensemble semi-algébrique ouvert de V est une union finie d'ouverts basiques usuels.*

DÉMONSTRATION. (Voir [BCR] - Théorème 2.7.2, p. 46 – 47).

REMARQUE 4.15.

1. Ces ouverts basiques forment une base de la topologie des semi-algébriques sur V , dite **topologie de Harrison**.
2. On verra un peu plus loin dans cette section (voir lemme (4.23)) que les ouverts basiques ne suffisent pas pour établir un lien entre les ultrafiltres de $SA(V)$ et les ordres du corps K ; c'est la raison pour laquelle on introduira une nouvelle base topologique des ouverts semi-algébriques (voir définition (4.17)).

NOTATIONS 4.16.

Soit E un espace topologique et U un sous-ensemble de E . On note par :

1. $\text{adh}(U)$, l'adhérence de U dans E , *i.e.*, le plus petit sous-ensemble fermé de E contenant U .
2. $\text{int}(U)$, l'intérieur de U dans E , *i.e.*, le plus grand sous-ensemble ouvert de E contenu dans U .

Définition 4.17 (OUVERTS RÉGULIERS ET RÉGULARISÉS). Soit U un sous-ensemble semi-algébrique de V . On appelle **régularisé de U** , l'intérieur de l'adhérence de U , qu'on note par **$\text{reg}(U)$** , *i.e.*, $\text{reg}(U) := \text{int}(\text{adh}(U))$.

Un ouvert U est dit **régulier**, s'il est égal à son régularisé, *i.e.*, si $U = \text{reg}(U)$.

REMARQUE 4.18.

Comme l'est le cas des ouverts basiques usuels, les ouverts basiques réguliers forment également une base d'ouverts pour la topologie des ouverts semi-algébriques.

Proposition 4.19.

- i) Le régularisé d'un semi-algébrique de V est un ouvert semi-algébrique.
- ii) Réciproquement, tout ouvert semi-algébrique de V est une union finie de régularisés de basiques.

La preuve de cette proposition n'est pas triviale (voir [Bru] - Paragraphe 8.11, p. 233). Une preuve pourra être donnée en utilisant le *lemme de Thom* dans sa version généralisée, faisant intervenir les *familles stratifiantes*. L'idée de base est la suivante :

Discussion 4.20. Etant donné un ouvert basique $U := U(a_1, \dots, a_n)$, on construit, à partir des a_i , des familles stratifiantes (sur plusieurs étapes) pour lesquelles l'adhérence de U , qui est fermé, sera une combinaison de fermés basiques définis par des inégalités larges \geq , dont l'intérieur s'obtient en relâchant les inégalités larges en inégalités strictes.

REMARQUE 4.21.

1. Pour tout ouvert semi-algébrique U de V , on a $U \subset \text{reg}(U)$.
2. Si U est un semi-algébrique ouvert de V , alors les fonctions régulières (générateurs) définissant $\text{reg}(U)$, comme union de basiques usuels, sont en général différentes des générateurs de U .

NOTATIONS 4.22.

Dans le cas où U est un ouvert semi-algébrique basique, i.e., $U = U(g_1, \dots, g_n) \subset V$ (avec $g_1, \dots, g_n \in A$), on utilise la notation " $V(g_1, \dots, g_n)$ " pour désigner le régularisé $\text{reg}(U)$ de U .

Une des différences majeures entre les ouverts basiques usuels et les ouverts basiques réguliers est donnée par :

Lemme 4.23 (PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES BASIQUES RÉGULIERS). Soit V une variété algébrique réelle affine et A son anneau de fonctions régulières. De plus, on se donne des éléments $g_1, \dots, g_n, h \in A$. On a alors l'équivalence :

$$V(g_1, \dots, g_n) \subset V(h) \iff h|_{V(g_1, \dots, g_n)} \geq 0.$$

On aura besoin du fait trivial suivant :

Fait 4.24. Soient E un espace topologique, U et U' des sous-ensembles non vides de E , avec U ouvert et U' fermé. On a alors :

$$U \subset \text{int}(U') \iff U \subset \text{reg}(U')$$

PREUVE (DU LEMME (4.23)).

$i) \implies ii)$ Cette implication est triviale. En effet :

$$\begin{aligned} U(h) &:= (h > 0) \subset (h \geq 0) \\ \Rightarrow \quad \text{adh}(U(h)) &\subset (h \geq 0) \\ \Rightarrow \quad \text{int}(\text{adh}(U(h))) &\subset (h \geq 0) \\ \Leftrightarrow \quad V(h) &\subset (h \geq 0) \end{aligned}$$

Donc si $V(g_1, \dots, g_n) \subset V(h)$, alors $V(g_1, \dots, g_n) \subset (h \geq 0)$, i.e., $h|_{V(g_1, \dots, g_n)} \geq 0$.

$ii) \implies i)$ Réciproquement, soit $x \in V(g_1, \dots, g_n)$. Par hypothèse on a $h(x) \geq 0$. On a donc deux cas à considérer :

- 1) $h(x) > 0$: Dans ce cas, $x \in U(h) \subset V(h)$.
- 2) $h(x) = 0$: Comme $V(g_1, \dots, g_n)$ est un ouvert, alors $\exists B$ une boule ouverte telle que $x \in B \subset V(g_1, \dots, g_n)$, ce qui donne $h|_B \geq 0$.
Il suffit de voir que $B \subset V(h)$. Supposons, par l'absurde, que cette inclusion n'est pas vérifiée, ce qui impliquerait, par le fait (4.24), que $B \not\subset \text{adh}(U(h))$, $\text{adh}(U(h))$ étant fermé, il existerait donc un ouvert non vide $A \subset B$ tel que $\text{adh}(U(h)) \cap A = \emptyset$ ce qui impliquerait à son tour que $V(h) \cap A = \emptyset$ et donc $h|_A < 0$. Par ailleurs, comme $A \subset B$, alors $h|_A \geq 0$. Ceci conduit à une contradiction. Ce qui prouve ainsi que $B \subset V(h)$, et donc $x \in V(h)$.

REMARQUE 4.25.

Le lemme (4.23) n'est plus vrai si l'on remplace les ouverts basiques réguliers $V(g_1, \dots, g_n)$ et $V(h)$ par les ouverts basiques usuels $U(g_1, \dots, g_n)$ et $U(h)$.

Exemple 4.26 (CONTRE-EXEMPLE POUR LES BASIQUES USUELS). Considérons la variété $V = \mathbb{R}^2$. Notons par $A := \mathbb{R}[x, y]$ et $K := \mathbb{R}(x, y)$, respectivement, l'anneau des fonctions régulières sur V et son corps de fractions.

Si l'on prend $g := 1$ et $h := x^2 + y^2$, alors on a bien $U(g) = \mathbb{R}^2$ et $h|_{U(g)} = h \geq 0$, mais on n'a pas $\mathbb{R}^2 = U(g) \subset U(h) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4.2.2 Théorème de "Correspondance" de Brumfiel

Soient, pour toute la suite, V une variété algébrique réelle (sur \mathbb{R}), affine, de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ et que nous supposons irréductible, A son anneau des fonctions régulières et K le corps de fractions de A . Notons également par X_K et G_K , l'espace d'ordres de K et le groupe spécial (réduit) associé.

Définition 4.27 (RANG D'UN (PRÉ, ULTRA)FILTRE). Soit \mathcal{F} un préfiltre de $SA(V)$.

1. On appelle **rang de \mathcal{F}** et on note $rg(\mathcal{F})$, la plus petite des dimensions des éléments de \mathcal{F} (pour la topologie euclidienne de la variété V).
2. Un préfiltre de rang d est dit **préfiltre de rang maximal**.
3. Le rang d'un (ultra)filtre est son rang en tant que préfiltre.
4. Le rang d'un préfiltre est un entier compris entre 0 et $d (= \dim(V))$.

Proposition 4.28. $SA(V)$ possède des ultrafiltres de tous rangs, et en particulier des (pré)filtres de tous rangs.

INDICATION. Utiliser le fait que toute variété de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ possède des sous-variétés de toutes dimensions $k \in \{0, \dots, d\}$, puis construire des (pré,ultra)filtres sur ces sous-variétés et les étendre enfin à la variété ambiante, V .

Proposition 4.29. Pour tout sous-ensemble semi-algébrique non vide U , de V , on a équivalence entre :

- i) U est de dimension $d = \dim(V)$.
- ii) U contient un ouvert non vide de V , i.e., $\text{int}(U) \neq \emptyset$.
- iii) $\text{reg}(U)$ contient un ouvert non vide de V , i.e., $\text{reg}(U) \neq \emptyset$.

REMARQUE 4.30.

Cette proposition dit simplement que les (pré, ultra)filtres de rang maximal sont composés de semi-algébriques de dimension d de V , i.e., de semi-algébriques à intérieurs non vides.

NOTATION 4.31.

On note par Γ l'ensemble de tous les ultrafiltres de rang maximal sur V .

La théorie principale de cette section est la suivante :

Théorème 4.32 (Correspondance de Brumfiel). Il y a une correspondance bijective entre les ordres de K (i.e., les éléments de X_K) et les ultrafiltres de $SA(V)$ de rang maximal (i.e., les éléments de Γ).

La preuve du théorème de correspondance de Brumfiel requiert un certain nombre de résultats techniques.

Fait 4.33. Soient $g \in K$ et U , un semi-algébrique ouvert non vide de V tel que $\dim(U) = \dim(V)$. Alors :

$$g|_U = 0 \iff g = 0$$

Fait 4.34. Soient E un espace topologique, U et U' deux sous-ensembles non vides de E . Alors :

$$i) \text{ } adh(U \cap U') \subset adh(U) \cap adh(U').$$

$$ii) \text{ } int(U \cap U') \subset int(U) \cap int(U').$$

En particulier :

$$iii) \text{ } reg(U \cap U') \subset reg(U) \cap reg(U')$$

Corollaire 4.35 (STABILITÉ DES RÉGULIERS BASIQUES PAR CONCATÉNATION). Soient $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in K$ des éléments de K . Alors :

$$V(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m) \subset V(g_1, \dots, g_n) \cap V(h_1, \dots, h_m)$$

Théorème 4.36 (COROLLAIRE DU PRINCIPE DE TRANSFERT). Soient $g_1, \dots, g_m \in A^*$ des éléments non nuls de A^{17} , $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}$ leurs classes d'équivalence dans $G_K := K^*/(\sum K^*)^2$. Notons également par α le préordre de K engendré par les g_i . Alors on a équivalence entre :

$$i) \text{ } \dim(V(g_1, \dots, g_m)) = \dim(V).$$

$$ii) \text{ } \dim(U(g_1, \dots, g_m)) = \dim(V).$$

iii) α est un préordre propre.

$$iv) \text{ } U(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}) \neq \emptyset \text{ (dans } X_K).$$

DÉMONSTRATION. V étant une variété réelle affine, on peut donc la plonger dans une variété \mathbb{R}^n , pour $n \geq d$. Par ailleurs, V est définie par un système fini d'équations polynômiales " $P_j = 0$ " ($j \in \{1, \dots, k\}$, pour un choix de $k \in \mathbb{N}^*$), où $P_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ sont des polynômes irréductibles réels. Si l'on pose $\mathcal{P} := \langle P_1, \dots, P_k \rangle$, l'idéal premier de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les P_j , alors l'anneau A est isomorphe au quotient $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}$. Notons par a_1, \dots, a_m des représentants des g_1, \dots, g_m dans $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, i.e., $g_i = a_i \cdot \mathcal{P}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

$i) \Leftrightarrow ii)$: Conséquence de la proposition (4.29).

$ii) \Rightarrow iii)$: Les éléments de α sont, par définition, des sommes finies de produits des g_i et des sommes de carrés de K . Comme $U(g_1, \dots, g_m) \neq \emptyset$, alors $\exists v \in V$ tel que $g_i(v) > 0$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. Or, si α n'est pas un préordre propre, alors $-1 \in \alpha$ est une somme finie de produits des g_i et des sommes de carrés de K , et en particulier $(-1)(v) \geq 0$ (-1 est l'application constante ayant -1 comme valeur), ce qui contredit l'hypothèse.

$iii) \Leftrightarrow iv)$: Si α est propre, alors il est contenu dans un ordre de K , disons σ , et dans ce cas, il est clair que $U(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}) \neq \emptyset$, car $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $g_i \in \sigma$, donc $\overline{g_i}(\sigma) = 1$. Réciproquement, si $U(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}) \neq \emptyset$, alors tout ordre $\sigma \in U(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m})$ contient le préordre α ce qui implique que α est propre.

$iv) \Rightarrow ii)$: Supposons que $U(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}) \neq \emptyset$. Choisissons $\sigma \in U(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m})$ et notons par " \leq_σ " la relation (binaire) d'ordre associée. D'une part, en posant $x_l := X_l \cdot \mathcal{P}$, les classes des coordonnées X_l dans A , $\forall l \in \{1, \dots, n\}$, alors on peut écrire :

$$g_i = a_i(X_1, \dots, X_n) \cdot \mathcal{P} := a_i(x_1, \dots, x_n) \in A; \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Par ailleurs, si l'on note par $(\overline{K}_\sigma^r, \leq_\sigma^r)$ la clôture réelle de (K, \leq_σ) et par \leq l'ordre des réels, on aura donc une extension de corps ordonnés comme suit :

$$(\mathbb{R}, \leq) \subset (K, \leq_\sigma) \subset (\overline{K}_\sigma^r, \leq_\sigma^r)$$

17. On peut choisir les g_i , indifféremment, dans A ou dans K .

où (\mathbb{R}, \leq) et $(\overline{K}_\sigma^r, \leq_\sigma)$ sont des corps réels clos. Considérons ensuite la formule élémentaire suivante (écrite dans le langage des corps ordonnés) :

$$\bigwedge_{i=1}^{i=m} (g_i > 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l = 0).$$

Par l'hypothèse $U(\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_m) \neq \emptyset$, cette formule est vérifiée dans (K, \leq_σ) . Comme $g_i = a_i(x_1, \dots, x_n) \in A$,

$$(K, \leq_\sigma) \models \bigwedge_{i=1}^{i=m} (a_i(x_1, \dots, x_n) >_\sigma 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l(x_1, \dots, x_n) = 0).$$

Ceci entraîne :

$$(K, \leq_\sigma) \models \exists \underline{v} \bigwedge_{i=1}^{i=m} (a_i(\underline{v}) >_\sigma 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l(\underline{v}) = 0).$$

Les variables étant quantifiées existentiellement, on a :

$$(\overline{K}_\sigma^r, \leq_\sigma^r) \models \exists \underline{v} \bigwedge_{i=1}^{i=m} (a_i(\underline{v}) >_\sigma^r 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l(\underline{v}) = 0).$$

D'après le théorème de transfert (version modèle-théorique - voir corollaire (1.28)), et en tenant compte du fait que les polynômes a_i et P_l sont à coefficients dans \mathbb{R} , on obtient :

$$(\mathbb{R}, \leq) \models \exists \underline{v} \bigwedge_{i=1}^{i=m} (a_i(\underline{v}) > 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l(\underline{v}) = 0).$$

Ce qui implique qu'il existe un point $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ pour lequel :

$$\bigwedge_{i=1}^{i=m} (a_i(\underline{r}) > 0) \wedge \bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l(\underline{r}) = 0).$$

Le système $\bigwedge_{l=1}^{l=k} (P_l(\underline{r}) = 0)$ dit simplement que $\underline{r} \in V$, et le système $\bigwedge_{i=1}^{i=m} (a_i(\underline{r}) > 0)$ dit que $\underline{r} \in U(g_1, \dots, g_m)$. Ce qui finit la preuve du théorème (4.36).

Corollaire 4.37. Soient $\sigma \in X_K$ un préordre propre sur K et $g_1, \dots, g_n \in \sigma$. Alors :

$$U(g_1, \dots, g_n) \neq \emptyset \quad (\text{comme ouvert basique de } V).$$

Passons maintenant à la preuve du théorème de correspondance de Brumfiel (4.32).

L'idée clé de la preuve consiste à construire deux applications, que nous noterons, respectivement :

$$\wp : \Gamma \rightarrow X_K \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} : X_K \rightarrow \Gamma,$$

puis montrer qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Proposition 4.38 (L'APPLICATION \wp).

i) Pour tout filtre de rang maximal $\mathcal{F} \in \Gamma$, sur V , l'ensemble :

$$\wp(\mathcal{F}) := \{g \in K ; \exists U \in \mathcal{F}, g|_U \geq 0\} = \{g \in K ; \exists U \in \mathcal{F}, U \subset V(g)\} \cup \{0\},$$

est un ordre partiel sur K .

- ii) Si, de plus, \mathcal{F} est un ultrafiltre de rang maximal (un élément de Γ), alors $\wp(\mathcal{F})$ est un ordre (un élément de X_K). Dans ce cas, $\wp(\mathcal{F}) = \{g \in K ; V(g) \in \mathcal{F}\} \cup \{0\}$.

REMARQUE 4.39.

L'égalité $\{g \in K ; \exists U \in \mathcal{F}, g|_U \geq 0\} = \{g \in K ; \exists U \in \mathcal{F}, U \subset V(g)\} \cup \{0\}$, du premier point de la proposition précédente découle du lemme (4.23) et de la proposition (4.29). En effet, il suffit de choisir (par (4.29)) un ouvert basique régulier de dimension d , disons $U = V(g_1, \dots, g_n)$, et appliquer (4.29) : $g|_{V(g_1, \dots, g_n)} \geq 0 \iff V(g_1, \dots, g_n) \subset V(g)$.

Notons que la condition de maximalité du filtre est nécessaire pour le choix du basique régulier.

PREUVE (DE LA PROPOSITION (4.38)).

- i) On se donne un filtre de rang maximal \mathcal{F} . Montrons que $\wp(\mathcal{F})$ vérifie les axiomes **(CP0)** à **(CP3)** des ordres partiels sur K (voir définition (1.6)).

(CP0) : Soit $g \in K^2$ un carré. Alors g est positif ou nul en tout point de V , et en particulier, si $U \in \mathcal{F}$, alors $g|_U \geq 0$, donc $g \in \wp(\mathcal{F})$. Ce qui prouve que $K^2 \subset \wp(\mathcal{F})$.

(CP1) et (CP2) : Soient $g, h \in \wp(\mathcal{F})$, donc $\exists U, U' \in \mathcal{F}$ tels que $g|_U \geq 0$ et $h|_{U'} \geq 0$. \mathcal{F} étant un filtre, alors $U \cap U' \in \mathcal{F}$, avec $U \cap U' \neq \emptyset$. Or, on a d'une part, $U \cap U' \subset U$, donc $g|_{U \cap U'} \geq 0$, et d'autre part, $U \cap U' \subset U'$, donc $h|_{U \cap U'} \geq 0$, ce qui donne finalement $(g + h)|_{U \cap U'} \geq 0$ et $(g \cdot h)|_{U \cap U'} \geq 0$, et donc $\wp(\mathcal{F})$ est stable par addition et par multiplication.

(CP3) : Soit $g \in K$ tel que $g \in \wp(\mathcal{F})$ et $-g \in \wp(\mathcal{F})$, donc $\exists U, U' \in \mathcal{F}$ tels que $g|_U \geq 0$ et $-g|_{U'} \geq 0$. Comme $U \cap U' \in \mathcal{F}$ et que \mathcal{F} est de rang maximal, alors il existe un ouvert non vide $A \subset U \cap U'$ (il suffit de prendre $A = \text{int}(U \cap U')$) tel que, $g|_A \geq 0$ et $-g|_A \geq 0$ ($\iff g|_A \leq 0$), ce qui prouve que $g|_A = 0$, et d'après le fait (4.33), on aura $g = 0$ sur V , i.e., $g = 0 \in K$. Ceci prouve que $\wp(\mathcal{F}) \cap (-\wp(\mathcal{F})) = \{0\}$.

Ce qui prouve que $\wp(\mathcal{F})$ est un ordre partiel sur K .

- ii) Supposons que \mathcal{F} est un ultrafiltre. Vérifions l'axiome **(CP4)** de la définition (1.1).

(CP4) : Pour tout élément $g \in K$, V est une union disjointe des ensembles $U(g)$, $U(-g)$ et $Z(g)$ ¹⁸. D'après le théorème (4.8), combiné avec l'hypothèse que \mathcal{F} est un ultrafiltre, un seul de ces ensembles est un élément de \mathcal{F} . De plus, \mathcal{F} étant de rang maximal, alors $Z(g) \notin \mathcal{F}$. Il nous reste donc les deux possibilités, $U(g) \in \mathcal{F}$ ou $U(-g) \in \mathcal{F}$ (mais pas les deux). Or, $g|_{U(g)} > 0$ et $-g|_{U(-g)} > 0$, donc, si $U(g) \in \mathcal{F}$, alors $g \in \wp(\mathcal{F})$, et si $U(-g) \in \mathcal{F}$, alors $-g \in \wp(\mathcal{F})$. Ce qui prouve que $\wp(\mathcal{F}) \cup (-\wp(\mathcal{F})) = K$. On en déduit donc que $\wp(\mathcal{F})$ est un ordre sur K .

Proposition 4.40 (L'APPLICATION \mathfrak{F}).

- i) Soit σ un ordre partiel sur K . Alors l'ensemble :

$$\mathfrak{F}(\sigma) := \{U \in SA(V) ; \exists g_1, \dots, g_n \in \sigma, V(g_1, \dots, g_n) \subset U\},$$

est un filtre propre de rang maximal sur V .

- ii) Si, de plus, σ est un ordre (un élément de X_K), alors $\mathfrak{F}(\sigma)$ est un ultrafiltre de rang maximal (un élément de Γ).

PREUVE (DE LA PROPOSITION (4.40)).

- i) Soit maintenant σ un ordre partiel sur K . Montrons que $\mathfrak{F}(\sigma)$ est un filtre propre de rang maximal sur V (voir définition (4.5)).

(F0) : Comme $1 \in \sigma$ et que $V(1) = V \subset V$, alors $V \in \mathfrak{F}(\sigma)$, et donc $\mathfrak{F}(\sigma) \neq \emptyset$.

18. Par définition, $Z(g) := (g = 0) := \{r \in V ; g(r) = 0\}$.

- (F1) : Soient $U, U' \in \mathfrak{F}(\sigma)$, donc $\exists g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in \sigma$ tels que $V(g_1, \dots, g_n) \subset U$ et $V(h_1, \dots, h_m) \subset U'$, ce qui donne $V(g_1, \dots, g_n) \cap V(h_1, \dots, h_m) \subset U \cap U'$. Par le corollaire (4.35), on obtient $V(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m) \subset U \cap U'$, avec $V(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m) \neq \emptyset$ (voir théorème de transfert (4.36) et son corollaire (4.37)), donc $U \cap U' \neq \emptyset$ et $U \cap U' \in \mathfrak{F}(\sigma)$, donc $\mathfrak{F}(\sigma)$ est stable par intersection.
- (F1') : Toujours par le théorème (4.36) et son corollaire (4.37), pour tous $g_1, \dots, g_n \in \sigma$, l'ensemble $V(g_1, \dots, g_n)$ est non vide et de dimension $d (= \dim(V))$, ce qui prouve donc que $\emptyset \notin \mathfrak{F}(\sigma)$, i.e., $\mathfrak{F}(\sigma)$ est propre et que tout semi-algébrique $U \in \mathfrak{F}(\sigma)$ est de dimension d (car U contient un semi-algébrique régulier, donc un ouvert), i.e., $\mathfrak{F}(\sigma)$ est de rang maximal.
- (F2) : Soient $U \in \mathfrak{F}(\sigma)$ et $U' \in SA(V)$ tels que $U \subset U'$. On aura donc des éléments $g_1, \dots, g_n \in \sigma$ tels que $V(g_1, \dots, g_n) \subset U$, et donc $V(g_1, \dots, g_n) \subset U'$, ce qui prouve que $U' \in \mathfrak{F}(\sigma)$.

REMARQUE 4.41.

On a montré à présent que si σ est un ordre partiel sur K , alors $\mathfrak{F}(\sigma)$ est un filtre propre de rang maximal sur V . Pour finir la preuve de la proposition (4.40), il ne nous reste qu'à montrer que $\mathfrak{F}(\sigma)$ est maximal (pour l'inclusion), i.e., qu'il n'est pas strictement inclus dans un filtre propre de $SA(V)$, et pour cela, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.42 ([BRU] - PROPOSITION 8.11.1, p. 234). *On se donne deux filtres propres de rang maximal \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , sur V et deux ordres partiels σ_1 et σ_2 , sur K . Alors :*

- (a) $\mathcal{F}_1 \subset \wp(\mathcal{F}_1)$.
- (b) $\sigma_1 \subset \wp(\mathfrak{F}(\sigma_1))$.
- (c) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \implies \wp(\mathcal{F}_1) \subset \wp(\mathcal{F}_2)$.
- (d) $\sigma_1 \subset \sigma_2 \implies \mathfrak{F}(\sigma_1) \subset \mathfrak{F}(\sigma_2)$.

ii) Si σ est un ordre, alors le seul axiome restant à vérifier est (F3) (voir théorème (4.8)).

(F3) : Par l'absurde, soit $\sigma \in X_K$ un ordre sur K et supposons que $\mathfrak{F}(\sigma)$ n'est pas un ultrafiltre. Alors $\exists \mathcal{F}' \in \Gamma$, un ultrafiltre sur V , de rang maximal bien sûr, tel que $\mathfrak{F}(\sigma) \subsetneq \mathcal{F}'$ (car $\mathfrak{F}(\sigma)$ est un filtre propre).

Soit donc $U \in \mathcal{F}' \setminus \mathfrak{F}(\sigma)$, où U est un ouvert régulier de la forme $V(g_1, \dots, g_n)$, avec $g_1, \dots, g_n \in K^*$ (en choisissant un semi-algébrique ouvert appartenant à \mathcal{F}' et l'écrivant comme une union finie de basiques réguliers et en appliquant le théorème de caractérisation (4.8) ainsi que la maximalité du rang de \mathcal{F}').

Comme $\sigma \subset \wp(\mathfrak{F}(\sigma)) \subset \wp(\mathcal{F}')$ (voir lemme (4.42)) et que σ et $\wp(\mathcal{F}')$ sont des ordres sur K (voir proposition (4.38)), alors $\sigma = \wp(\mathcal{F}')$.

Par ailleurs, et par définition de $\wp(\mathcal{F}')$, il est clair que $g_1, \dots, g_n \in \wp(\mathcal{F}')$, car chacun des g_i est positif ou nul sur $U := V(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{F}'$, i.e., $U \subset V(g_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}$, on obtient donc $g_1, \dots, g_n \in \sigma$, et par définition de $\mathfrak{F}(\sigma)$, ceci force U à appartenir à $\mathfrak{F}(\sigma)$, ce qui conduit à une contradiction.

Par conséquent $\mathfrak{F}(\sigma)$ est maximal (pour l'inclusion) parmi les filtres propres de rang maximal de $SA(V)$, c'est donc un ultrafiltre de rang maximal.

Ceci finit la preuve de la proposition (4.40).

PREUVE (DU LEMME (4.42)).

(a) Fixons-nous un élément $U' \in \mathcal{F}_1$. Par définition de \wp et \mathfrak{F} , on a :

$$\wp(\mathcal{F}_1) = \{g \in K ; \exists U \in \mathcal{F}_1, g|_U \geq 0\}$$

et

$$\mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F}_1)) = \{U \in SA(V) ; \exists g_1, \dots, g_n \in \wp(\mathcal{F}_1), V(g_1, \dots, g_n) \subset U\}.$$

Ce qui veut dire :

$$\mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F}_1)) = \{U \in SA(V) ; \exists g_1, \dots, g_n \in K \text{ et } \exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}_1 ; \\ g_{i|U_i} \geq 0 \text{ et } V(g_1, \dots, g_n) \subset U\}.$$

On obtient donc :

$$\mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F}_1)) = \{U \in SA(V) ; \exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{F}_1 , \bigcap_{i=1}^{i=n} U_i \subset U\}.$$

Il suffit donc de prendre $n = 1$ et $U_1 = U'$. On obtient ainsi $U' \in \mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F}_1))$, ce qui prouve l'inclusion $\mathcal{F}_1 \subset \mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F}_1))$.

REMARQUE 4.43.

La dernière égalité (description de $\mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F}_1))$), découle encore une fois du lemme (4.23) et de la proposition (4.29). En effet, il suffit de choisir des basiques réguliers, disons $U_i = V(g_{i,1}, \dots, g_{i,n_i})$, appliquer (4.29) : $g_{i|V(g_{i,1}, \dots, g_{i,n_i})} \geq 0 \iff V(g_{i,1}, \dots, g_{i,n_i}) \subset V(g)$, et enfin prendre pour g_1, \dots, g_n , tous ces g_{i,j_i} ($j_i \in \{1, \dots, n_i\}$).

(b) Soit σ_1 un ordre partiel sur K . Par la définition de \mathfrak{F} , on a :

$$\mathfrak{F}(\sigma_1) = \{U \in SA(V) ; \exists g_1, \dots, g_n \in \sigma_1 , V(g_1, \dots, g_n) \subset U\}.$$

Par la définition de \wp ainsi que par le lemme (4.23), on a donc :

$$\begin{aligned} \wp(\mathfrak{F}(\sigma_1)) &= \{g \in K ; \exists U \in \mathfrak{F}(\sigma_1) , g|_U \geq 0\} \\ &= \{g \in K ; \exists g_1, \dots, g_n \in \sigma_1 , g|_{V(g_1, \dots, g_n)} \geq 0\} \\ &= \{g \in K ; \exists g_1, \dots, g_n \in \sigma_1 , V(g_1, \dots, g_n) \subset V(g)\}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $n = 1$ et $g = g_1$. On obtient alors $g \in \wp(\mathfrak{F}(\sigma_1))$, et par conséquent $\sigma_1 \subset \wp(\mathfrak{F}(\sigma_1))$.

- (c) Soient $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ une inclusion de filtres propres de rang maximal et $g \in \wp(\mathcal{F}_1)$. Alors, $\exists U \in \mathcal{F}_1$ tel que $U \subset V(g)$. U étant aussi un élément de \mathcal{F}_2 , alors par définition de $\wp(\mathcal{F}_2)$, on aura $g \in \wp(\mathcal{F}_2)$, et par conséquent $\wp(\mathcal{F}_1) \subset \wp(\mathcal{F}_2)$.
- (d) On se donne enfin une inclusion d'ordres partiels $\sigma_1 \subset \sigma_2$ et un élément $U \in \mathfrak{F}(\sigma_1)$. Alors, $\exists g_1, \dots, g_n \in \sigma_1$ tel que $V(g_1, \dots, g_n) \subset U$. Les g_1, \dots, g_n sont également des éléments de σ_2 , alors par définition de $\mathfrak{F}(\sigma_2)$, on obtient $U \in \mathfrak{F}(\sigma_2)$, par conséquent $\mathfrak{F}(\sigma_1) \subset \mathfrak{F}(\sigma_2)$.

Lemme 4.44. On se donne un ultrafiltre de rang maximal \mathcal{F} sur V , ainsi qu'un ordre $\sigma \in X_K$. On a alors :

$$\sigma = \wp(\mathfrak{F}(\sigma)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \mathfrak{F}(\wp(\mathcal{F})).$$

Corollaire 4.45. On se donne deux ultrafiltres $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sur V , de rang maximal, ainsi que deux ordres σ_1, σ_2 sur K . On a donc ;

- i) $\sigma_1 = \sigma_2 \iff \mathfrak{F}(\sigma_1) = \mathfrak{F}(\sigma_2)$ (\mathfrak{F} est bien définie et injective).
- ii) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \iff \wp(\mathcal{F}_1) = \wp(\mathcal{F}_2)$ (\wp bien définie et injective).

La correspondance de Brumfiel est une conséquence du corollaire suivant :

Corollaire 4.46 (FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME (4.32)). Les restrictions :

$$\wp \circ \mathfrak{F} : X_K \longrightarrow X_K \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} \circ \wp : \Gamma \longrightarrow \Gamma,$$

sont les identités respectives de X_K et Γ .

5 Ordres et demi-branches

Mots-clés : Plans affine et projectif, topologie quotient, projectification, demi-branches, germes, équivalence topologique de demi-branches, équivalence algébrique de demi-branches, drapeaux, demi-branches algébriques signées, demi-branches pseudo-algébriques, demi-branche de Bézout, ultrafiltres, centre d'une demi-branche, support d'une demi-branche.

Références : [ABR], [AGR1], [AGR2], [AlRa], [AR], [BCR], [Bru], [Rui1].

Résumé

Si les faisceaux représentent les "objets locaux" permettant l'étude microscopique des variétés en Géométrie algébrique (réelle ou complexe), les ensembles semi-algébriques, quant à eux, constituent les "briques semi-locales" qui les composent.

*On a vu dans la section §4 que les ultrafiltres peuvent parfois se substituer aux faisceaux pour appréhender certaines propriétés semi-locales d'une variété algébrique, notamment pour décrire la structure, au moins à l'échelle ensembliste, de l'espace d'ordres de son corps de fonctions. Mais en général, tel est le cas par exemple de la variété \mathbb{R}^2 , les ultrafiltres sont des objets mathématiques très peu accessibles à l'intuition et par le calcul, et l'objet de cette section est de présenter l'esquisse d'une approche constructive permettant un visionnement plus clair des ultrafiltres des semi-algébriques de \mathbb{R}^2 et donc des ordres de $\mathbb{R}(x, y)$, en utilisant des objets plus accessibles par le calcul, à savoir les **demi-branches**.*

Les références principales pour cette section sont les articles [AGR1] et [AGR2] d'Alonso, Gamboa et Ruiz, dans lesquelles une classification complète des ordres de $\mathbb{R}(x, y)$ en termes de demi-branches (analytiques) est donnée.

Notre objectif ici est d'illustrer comment, à partir d'une demi-branche (de Bézout), on peut associer un ordre de $\mathbb{R}(x, y)$, donc un ultrafiltre de rang maximal de semi-algébriques de dimension 2 de \mathbb{R}^2 .

5.1 Espace projectif et projectifié d'un ensemble

Pour toute la suite de cette section, on se fixe les notations suivantes :

- $V := \mathbb{R}^2$ est le plan affine réel.
- $\mathbb{P}(V) := \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, le plan projectif réel.
- $A := \mathbb{R}[x, y]$, l'anneau factoriel (intègre) des polynômes réels en deux variables.
- $K := \mathbb{R}(x, y)$ le corps des fractions rationnelles réelles en deux variables (corps de fractions de A).

REMARQUE 5.1.

1. En choisissant un plongement de V dans $\mathbb{P}(V)$, disons $\tau : V \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, en envoyant les coordonnées (non-homogènes) (x, y) , dans le plan affine V , sur les coordonnées homogènes, disons $(x, y, 1)$, dans $\mathbb{P}(V)$, V s'identifie à un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$.
2. Dans ce cas, le complémentaire de V dans $\mathbb{P}(V)$ est l'ensemble des points à coordonnées homogènes $(x, y, 0)$. On appelle ce complémentaire, ensemble des **points à l'infini** de $\mathbb{P}(V)$.

Définition 5.2 (PROJECTIFIÉ). Soit $U \subset V$ un sous-ensemble, disons semi-algébrique non vide, (on peut considérer U comme un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$, via le plongement τ). On appelle **projectifié** de U , et on le note $\mathbb{P}(U)$, l'adhérence de U dans $\mathbb{P}(V)$ (dans sa topologie quotient), suivant le plongement τ défini plus haut.

5.2 Demi-branches et germes topologiques

Définition 5.3 (DEMI-BRANCHE TOPOLOGIQUE). On appelle **demi-branche topologique** toute image homéomorphe du segment $]0, 1[$ dans V , i.e., l'image d'une application :

$$\phi :]0, 1[\longrightarrow V,$$

continue, ouverte et bijective sur son image $\phi(]0, 1[)$. On utilise la notation $db(\phi)$ pour désigner une telle demi-branche. L'application ϕ est appelée **paramétrisation** de $db(\phi)$.

Exemple 5.4. L'image de l'application :

$$\begin{aligned} \Gamma :]0, 1[&\longrightarrow V \\ t &\longmapsto (x = 2 \cos(2\pi t) + \cos(6\pi t) ; y = 2 \sin(2\pi t) - \sin(6\pi t)) \end{aligned}$$

appelée **hypocycloïde**, n'est pas une demi-branche topologique, car elle n'est pas homéomorphe sur son image. En revanche, on peut trouver une restriction de Γ sur un segment $]0, \epsilon[$ (avec $\epsilon \in]0, 1[$), telle que $\Gamma(]0, \epsilon[)$ soit homéomorphe à $]0, \epsilon[$, donc à $]0, 1[$.

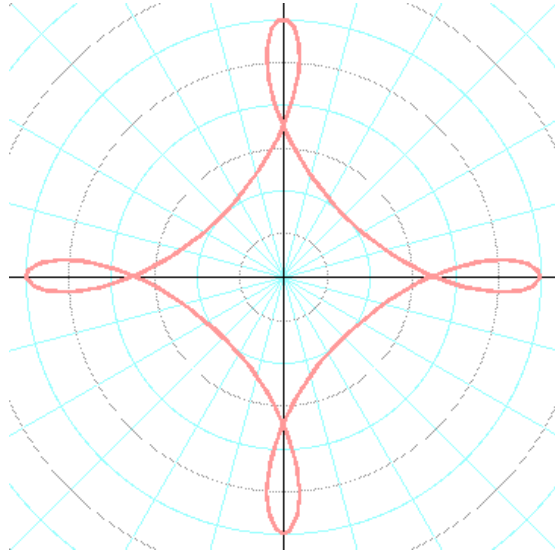


FIGURE 1 – Exemple d'une paramétrisation qui n'est pas une demi-branche topologique (HYPOCYCLOÏDE).

Définition 5.5 (CENTRE D'UNE DEMI-BRANCHE TOPOLOGIQUE). Soit $db(\phi)$ une demi-branche topologique, ayant $\phi :]0, 1[\longrightarrow V$ comme paramétrisation.

On dit que $db(\phi)$ admet un **centre** dans $\mathbb{P}(V)$, disons $p \in \mathbb{P}(V)$, si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\epsilon) = p$, comme unique limite à droite de ϕ en 0, dans $\mathbb{P}(V)$. Ceci se traduit par :

$$\exists \eta \in]0, 1[; \forall \epsilon \in]0, \eta[; \text{adh}(\phi(]0, \epsilon[)) \setminus \phi(]0, \epsilon[) = \{p\}$$

Une demi-branche admettant un centre $p \in \mathbb{P}(V)$ est dite **centrale** ou, plus exactement, **centrée en p** et on la note $db(\phi)_p$, ou simplement db_p , si le contexte est clair.

Définition 5.6 (DEMI-BRANCHES FINI/INFINIE). Une demi-branche est dite **infinie** ou **centrée à l'infini**, si son centre est un point de $\mathbb{P}(V) \setminus V$, et elle est dite **finie** si son centre est un point de V .

NOTATIONS 5.7.

Pour tout point $p \in \mathbb{P}(V)$, on note par $DB(p)$ l'ensemble des demi-branches topologiques centrées en p , et par DB , l'ensemble de toutes les demi-branches topologiques centrées en les points de $\mathbb{P}(V)$, i.e., :

$$DB := \bigsqcup_{p \in \mathbb{P}(V)} DB(p).$$

Définition 5.8 (CONGRUENCE TOPOLOGIQUE). Deux demi-branches topologiques centrales $db(\phi)_p$ et $db(\phi')_{p'}$, paramétrées par $\phi :]0, 1[\rightarrow V$ et $\phi' :]0, 1[\rightarrow V$ et centrées en p et p' , respectivement, sont dites **topologiquement congruentes**, si $\exists \epsilon, \exists \epsilon' \in]0, 1[$ tels que $\forall \nu \in]0, \epsilon[, \exists ! \nu' \in]0, \epsilon'[, \text{ tel que } \phi([0, \nu]) = \phi'([0, \nu']) \text{ et } \forall \nu' \in]0, \epsilon'[, \exists ! \nu \in]0, \epsilon[, \text{ tel que } \phi([0, \nu]) = \phi'([0, \nu'])$.

On note cette congruence par \sim_{top} et on écrit : $db(\phi)_p \sim_{top} db(\phi')_{p'}$.

REMARQUE 5.9.

Il est clair que, si $db(\phi)_p$ et $db(\phi')_{p'}$ sont deux demi-branches topologiques, topologiquement congruentes, alors $p = p'$ (égalité dans $\mathbb{P}(V)$).

Proposition 5.10 (LA CONGRUENCE TOPOLOGIQUE, RELATION D'ÉQUIVALENCE). La relation de congruence topologique \sim_{top} est une relation d'équivalence sur $DB(p), \forall p \in \mathbb{P}(V)$, elle l'est donc sur DB .

Définition 5.11 (GERME DE DEMI-BRANCHES). On appelle la classe d'équivalence d'un élément de DB , modulo la congruence topologique, un **germe de demi-branches topologiques**.

Si le contexte est clair, on appellera *demi-branche*, à la fois, une demi-branche topologique et sa classe d'équivalence modulo la relation \sim_{top} .

Exemples 5.12.

1. **Demi-branches algébriques :**

Une demi-branche centrale $db(\phi)_p$, paramétrée par $\phi :]0, 1[\rightarrow V$ est dite **algébrique**, s'il existe une courbe algébrique $\mathcal{C} := (P = 0)$, avec $P \in A$, un polynôme irréductible réel¹⁹, et un nombre $\epsilon \in]0, 1[$, tels que, $\phi([0, \epsilon]) \subset \mathcal{C}$.

On dit que \mathcal{C} est le **support** de $db(\phi)_p$, ou bien que $db(\phi)_p$ est **supportée** sur \mathcal{C} .

Il est clair que si $db(\phi)_p$ est algébrique, alors toute demi-branche $db(\phi')_{p'}$, telle que $db(\phi')_{p'} \sim_{top} db(\phi)_p$, est aussi algébrique et a la même courbe support \mathcal{C} .

2. **Demi-branches analytiques :**

Une demi-branche $db(\phi)_p$ est dite **analytique** si son application de paramétrisation ϕ est *analytique réelle* sur un sous-ensemble $]0, \epsilon[\subset]0, 1[$, i.e., les fonctions coordonnées ϕ_1 et ϕ_2 , telles que $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) \forall t \in]0, \epsilon[$, sont analytiques sur $]0, \epsilon[$. En d'autres termes, ces fonctions coordonnées sont de classe C^∞ et sont exprimables comme des séries convergentes de Taylor en tout point $t \in]0, \epsilon[$.

3. L'application :

$$\begin{aligned} \Psi :]0, 1[&\rightarrow V \\ t &\mapsto (t, \sin(\frac{1}{t})) \end{aligned}$$

définit une demi-branche topologique **non centrale**.

La raison est que cette application n'admet pas de limite en 0.

4. L'application :

$$\begin{aligned} \Omega :]0, 1[&\rightarrow V \\ t &\mapsto (t, t \cdot \sin(\frac{1}{t})) \end{aligned}$$

définit une demi-branche topologique centrée à l'origine $O(0, 0)$ du plan, mais cette demi-branche ne nous sera pas utile pour la description des ordres de K ni des ultrafiltres des semi-algébriques de V , à cause de son comportement "*instable*" au voisinage de l'origine.

19. Un polynôme irréductible P est dit **réel** si l'anneau quotient $\mathbb{R}[x, y]/(P)$ est formellement réel.

Pour éviter ce type de contraintes, on définit, sur DB , une nouvelle relation d'équivalence (plus fine que la congruence topologique), qui elle, donne lieu à une correspondance entre les nouvelles classes d'équivalences des demi-branches, les ultrafiltres de rang maximal de $SA(V)$ et les ordres associés de K , via la correspondance de Brumfiel.

5.3 Demi-Branches Algébriques Signées

Nous allons, dans ce qui suivra, associer à toute demi-branche algébrique deux demi-branches, dites *signées*, en utilisant la *décomposition cellulaire* des sous-ensembles semi-algébriques de V , et introduirons la notion d'*adjacence* ou de *compatibilité*, via le concept de "drapeau". Avant cela, voici quelques résultats connus, que l'on peut trouver dans [BCR], par exemple.

5.3.1 Décomposition cellulaire

Proposition 5.13 (DÉCOMPOSITION CELLULAIRE (1 : COORDONNÉES FINIES)). Soit $\mathcal{C} := (\pi = 0)$ une courbe algébrique, que nous supposons irréductible et de dimension 1²⁰, et p un point non isolé de \mathcal{C} . Alors il existe un réel positif r tel que $D^r(p) \setminus \mathcal{C}$ est composé d'un nombre n , fini et pair, de composantes connexes semi-algébriques ouvertes, appelées "cellules", délimitées²¹ par \mathcal{C} et $\mathcal{C}^r(p)$. $\mathcal{C}^r(p)$ étant le cercle de centre p et de rayon r et $D^r(p)$ le disque ouvert centré en p et de rayon r .

Proposition 5.14 (DÉCOMPOSITION CELLULAIRE (2 : COORDONNÉES INFINIES)). Soit $\mathcal{C} := (\pi = 0)$ une courbe algébrique, que nous supposons également irréductible et de dimension 1. Il existe donc un réel positif R tel que $\text{int}(V \setminus D^R(O)) \setminus \mathcal{C}$ est composé soit d'une unique ou d'un nombre n , fini et pair, de composantes connexes semi-algébriques ouvertes, appelées "cellules à l'infini", délimitées par \mathcal{C} et $\mathcal{C}^R(O)$ ou uniquement par $\mathcal{C}^R(O)$. $D^R(O)$ désigne le disque ouvert centré en l'origine O de V (plan affine réel) et de rayon R . De plus, $n = 1$ si, et seulement si, \mathcal{C} est compacte²².

Corollaire 5.15. Le nombre de demi-branches centrées en $p \in \mathbb{P}(V)$ et supportées sur une courbe algébrique irréductible et de dimension 1, \mathcal{C} , est fini et pair.

INDICATION. Le lecteur est renvoyé à la section §9.5 de [BCR] pour les détails techniques.

5.3.2 Drapeaux

Fixons-nous une orientation du plan réel affine V , disons l'*orientation trigonométrique*. Soient $\mathcal{C} := (\pi = 0) \subset V$ une courbe algébrique irréductible, $p \in \mathbb{P}(\mathcal{C})$ un point non isolé du projectifié de \mathcal{C} et $db_p := db(\phi)_p$ ²³ une demi-branche (algébrique) centrée en p , supportée sur \mathcal{C} et paramétrée par $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathcal{C}$. On distingue donc deux cas, $p \in \mathcal{C}$ et $p \in \mathbb{P}(\mathcal{C}) \setminus \mathcal{C}$.

Cas fini : $p \in \mathcal{C}$

Par la proposition (5.13) et le corollaire (5.15), en choisissant un réel positif suffisamment petit r , l'ensemble $D^r(p) \setminus \mathcal{C}$ est composé d'un nombre fini et pair de composantes connexes ouvertes, C_1, \dots, C_n , qu'on ordonne cycliquement comme suit :

20. Non réduite à un ensemble fini de points.

21. L'expression " A est délimité par B " signifie ici que la frontière de A est un sous-ensemble de B .

22. Il est à rappeler que \mathcal{C} est compacte dans $V \iff P(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

23. Pour simplifier, on utilisera la notation db_p pour désigner une demi-branche topologique quelconque.

$C_1 < C_2 < \dots < C_{n-1} < C_n < C_1$, suivant l'orientation choisie (voir paragraphe #10.4.3 et définition (10.31) pour plus de détails sur cet ordre cyclique). Il existe donc un unique indice $i \in \{1, \dots, n\}$ et un réel $\epsilon \in]0, 1[$, tel que $\phi(]0, \epsilon[) \subset \text{adh}(C_i) \cap \text{adh}(C_{i+1})$.

On appelle C_i cellule **prédécesseur immédiat** et C_{i+1} cellule **successeur immédiat** de la demi-branche db_p . Si le contexte est clair, on utilisera les notations $C^-(db_p)$ et $C^+(db_p)$ pour désigner, respectivement, ces cellules.

Cas infini : $p \in \mathbb{P}(\mathcal{C}) \setminus \mathcal{C}$

Supposons maintenant que \mathcal{C} est non compacte (son projectifié contient des points à l'infini) et considérons une demi-branche (algébrique) db_p paramétrée par $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathcal{C}$, centrée en $p \in \mathbb{P}(\mathcal{C}) \setminus \mathcal{C}$ (un point à l'infini de \mathcal{C}) et supportée sur \mathcal{C} .

Par la proposition (5.14) ainsi que le corollaire (5.15), en choisissant un réel R , suffisamment grand, l'ensemble $\text{int}(V \setminus D^R(O)) \setminus \mathcal{C}$ est composé d'un nombre fini *et pair* de composantes connexes ouvertes, C_1, \dots, C_n , qu'on ordonne également cycliquement par : $C_1 < C_2 < \dots < C_{n-1} < C_n < C_1$. Là encore, il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ et un réel $\epsilon \in]0, 1[$, tel que $\phi(]0, \epsilon[) \subset \text{adh}(C_i) \cap \text{adh}(C_{i+1})$.

Les composantes C_i et C_{i+1} sont dites cellule à l'infini **prédécesseur immédiat** et cellule à l'infini **successeur immédiat**, respectivement, de la demi-branche db_p . On utilisera les notations $C^-(db_p)$ et $C^+(db_p)$ pour désigner, respectivement, les cellules successeur immédiat et prédécesseur immédiat de db_p ²⁴.

Définition 5.16 (COMPATIBILITÉ À GAUCHE ET À DROITE). Soit U un ensemble semi-algébrique non vide. On dit que U est **compatible** avec la demi-branche db_p à gauche (resp. à droite) si :

$$\exists \epsilon \in]0, 1[; \phi(]0, \epsilon[) \subset \text{adh}(U \cap C^-(db_p)) \quad (\text{resp. } \phi(]0, \epsilon[) \subset \text{adh}(U \cap C^+(db_p))).$$

Ces adhérences sont prises dans V .

Proposition 5.17. Soit db_p une demi-branche algébrique.

- i) V est compatible avec db_p à gauche et à droite.
- ii) Un semi-algébrique compatible avec db_p (à gauche ou à droite) est à intérieur non vide (en particulier, il est non vide).
- iii) La réunion ainsi que l'intersection de deux semi-algébriques compatibles avec db_p à gauche (resp. à droite) est un semi-algébrique compatible du même type avec db_p .
- iv) Pour tout semi-algébrique $U \subset V$, un seul des ensembles U ou $V \setminus U$ est compatible avec db_p à gauche (même chose pour la compatibilité à droite).

Corollaire 5.18. La collection des semi-algébriques compatibles à gauche (resp. à droite) avec une demi-branche db_p algébrique est un ultrafiltre de rang maximal sur V .

Définition 5.19 (DRAPEAU (FLAG) DIRIGÉ À GAUCHE/À DROITE). ²⁵ Soient db_p demi-branche (algébrique) centrée en un point (fini ou infini) p et supportée sur une courbe algébrique (irréductible) \mathcal{C} et U un sous-ensemble semi-algébrique de V , compatible avec db_p à gauche (resp. à droite).

L'ensemble $U \cap C^-(db_p)$ (resp. $U \cap C^+(db_p)$) est appelé **drapeau dirigé à gauche** (resp. **à droite**) **à surface dans** U et supporté sur db_p .

On note un tel drapeau par $\text{flag}_U(db_p)^-$ (resp. $\text{flag}_U(db_p)^+$) ou simplement $\text{flag}(db_p)^-$ (resp.

24. Attention : On a inversé les signes $-$ et $+$ dans le cas infini, et ce, pour respecter l'orientation "autour des points à l'infini", des demi-branches algébriques.

25. Selon la terminologie de [AlRa], ces ensembles sont dits **microflags**.

$flag(db_p)^+$), si le contexte est clair.

On note l'ensemble des drapeaux dirigés à gauche (resp. à droite) supportés sur db_p par $Flag(db_p)^-$ (resp. $Flag(db_p)^+$).

Proposition 5.20.

- i) Un drapeau dirigé à gauche ou à droite et supporté sur une demi-branche algébrique db_p est toujours à intérieur non vide (donc non vide).
- ii) La réunion ainsi que l'intersection de deux drapeaux dirigés à gauche (resp. à droite) supportés sur une même demi-branche db_p est un drapeau dirigé à gauche (resp. dirigé à droite) et supporté sur db_p .
- iii) Si db_p et $db_{p'}$ sont deux demi-branches algébriques qui ne sont pas topologiquement équivalentes, alors $\exists flag(db_p)^* \in Flag(db_{p'}^*)^*$, $\exists flag'(db_{p'}^*)^* \in Flag(db_p^*)^*$, pour tout choix de signe $*$ $\in \{-, +\}$ tels que ; $flag(db_p)^* \cap flag'(db_{p'}^*)^* = \emptyset$.

5.3.3 Demi-branches algébriques signées

Définition 5.21 (DEMI-BRANCHE ALGÉBRIQUE SIGNÉE). On appelle les couples $(db_p, Flag(db_p)^-)$ et $(db_p, Flag(db_p)^+)$, les **demi-branches algébriques signées** associées à db_p . On note ces demi-branches par db_p^- et db_p^+ , respectivement. La demi-branche db_p est dite le **support algébrique** de ces demi-branches signées et p leur **centre**.

NOTATIONS 5.22.

Pour tout point $p \in \mathbb{P}(V)$, on note par $DBAS(p)$ l'ensemble des demi-branches algébriques signées centrées en p , et par $DBAS$ la réunion disjointe des $DBAS(p)$ quand p parcourt $\mathbb{P}(V)$:

$$DBAS := \bigsqcup_{p \in \mathbb{P}(V)} DBAS(p).$$

Par souci d'allègement des notations, un élément de $DBAS$ sera noté simplement db_p^* , où $*$ $\in \{-, +\}$.

Proposition 5.23 (COMPATIBILITÉ AVEC LES PRINCIPAUX : CAS ALGÉBRIQUE SIGNÉ). Soit db_p^* (où $*$ $\in \{-, +\}$) une demi-branche algébrique signée supportée sur une demi-branche algébrique db_p , ayant à son tour comme support une courbe algébrique irréductible réelle \mathcal{C} et comme centre un point $p \in \mathbb{P}(\mathcal{C})$. Alors, pour tout polynôme $P \in A^*$, il existe un drapeau $flag(db_p)^*$, représentant db_p^* , tel que :

$$(flag(db_p)^* \subset U(P)) \text{ ou } (flag(db_p)^* \subset U(-P)).$$

5.4 Demi-Branches Pseudo-Algébriques

Définition 5.24 (DEMI-BRANCHE TOPOLOGIQUE PSEUDO-ALGÉBRIQUE). On se donne une demi-branche non-algébrique db_p paramétrée par $\phi :]0, 1[\rightarrow V$ et centrée en un point $p \in \mathbb{P}(V)$. On dit que db_p est une demi-branche **topologique pseudo-algébrique**, si pour tout polynôme réel (non nul) $P \in A^*$, il existe un nombre réel $\epsilon \in]0, 1[$ tel que $Z(P) \cap \phi([0, \epsilon])$ ²⁶ soit fini.

REMARQUE 5.25.

Cette définition est inspirée de la propriété, dite de Bézout, sur l'intersection des courbes algébriques planes.

26. L'ensemble $Z(P)$ est l'ensemble des zéros réels de P , i.e., les points réels de la courbe $(P = 0)$.

Proposition 5.26 (COMPATIBILITÉ AVEC LES PRINCIPAUX : CAS PSEUDO-ALGÈBRIQUE). Soit db_p une demi-branche topologique pseudo-algèbrique, paramétrée par $\phi :]0, 1[\rightarrow V$ et centrée en $p \in \mathbb{P}(V)$. Alors :

$$\forall P \in A^*, \exists \epsilon \in]0, 1[; (\phi(]0, \epsilon[) \subset U(P)) \text{ ou } (\phi(]0, \epsilon[) \subset U(-P)).$$

Exemples 5.27.

1. La demi-branche centrée à l'origine du plan définie par la paramétrisation :

$$\begin{aligned} \Upsilon :]0, 1[&\rightarrow V \\ t &\mapsto (t, e^{-\frac{1}{t}}) \end{aligned}$$

est topologique pseudo-algèbrique.

2. La demi-branche centrée à l'origine du plan définie par la paramétrisation :

$$\begin{aligned} \Omega :]0, 1[&\rightarrow V \\ t &\mapsto (t, t \cdot \sin(\frac{1}{t})) \end{aligned}$$

n'est pas pseudo-algèbrique, car le polynôme $P(x, y) = y$ possède une infinité de zéros au voisinage du centre de cette demi-branche.

Proposition 5.28. Si db_p est topologique pseudo-algèbrique et db'_p une autre demi-branche topologiquement congruente à db_p , i.e., $db_p \sim_{top} db'_p$, donc non algèbrique forcément, alors db'_p est aussi topologique pseudo-algèbrique.

Définition 5.29 (DEMI-BRANCHE PSEUDO-ALGÈBRIQUE). A partir de là, on appelle demi-branche **pseudo-algèbrique** la classe d'équivalence, modulo la relation \sim_{top} d'une demi-branche topologique pseudo-algèbrique.

NOTATIONS 5.30.

Pour tout point $p \in \mathbb{P}(V)$, on note par $DBPA(p)$ l'ensemble des demi-branches pseudo-algébriques centrées en p , et par $DBPA$ la réunion disjointe :

$$DBPA := \bigsqcup_{p \in \mathbb{P}(V)} DBPA(p).$$

Un élément de $DBPA$ sera noté db_p^0 .

5.5 Demi-branches de Bézout

Définition 5.31 (COMPATIBILITÉ AVEC LES SEMI-ALGÈBRIQUES). Soit $U \in SA(V)$ un sous-ensemble semi-algèbrique non vide de V .

1. Soit db_p^0 une demi-branche pseudo-algèbrique dont un représentant est paramétré par $\phi :]0, 1[\rightarrow V$. On dit que U est **compatible** avec db_p^0 , si $\exists \epsilon \in]0, 1[$ tel que $\phi(]0, \epsilon[) \subset U$.
2. Soit db_p^* une demi-branche algèbrique signée. On dit que U est **compatible** avec db_p^* , s'il existe un drapeau $flag(db_p^*) \in \mathcal{F}lag(db_p^*)$ tel que $flag(db_p^*) \subset U$.

REMARQUES 5.32 (RAPPELS).

1. Tout semi-algèbrique compatible avec une demi-branche, algèbrique signée ou pseudo-algèbrique, est à intérieur non vide (i.e., contient un ouvert non vide).
2. L'intersection ainsi que la réunion de deux semi-algébriques compatibles avec une même demi-branche, algèbrique signée ou pseudo-algèbrique, est également un semi-algèbrique compatible avec cette même demi-branche.

Définition 5.33 (SÉPARATION/CONGRUENCE ALGÈBRIQUES). Deux demi-branches db_p^\star et $db_{p'}^{\star'}$, avec $p, p' \in \mathbb{P}(V)$ et $\star, \star' \in \{-, +, 0\}$, sont dites **algébriquement séparables**, s'il existe un polynôme réel non nul $P \in A^\star$, tel que :

- (I) db_p^\star est compatible avec $U(P)$,
- (II) $db_{p'}^{\star'}$ est compatible avec $U(-P)$.

Si ces demi-branches ne sont pas algébriquement séparables, elles seront dites **algébriquement congruentes**, et on note dans ce cas ; $db_p^\star \sim_{alg} db_{p'}^{\star'}$.

REMARQUE 5.34.

Si $db_p^\star \sim_{alg} db_{p'}^{\star'}$, sont deux demi-branches algébriquement congruentes, alors $p = p' \in \mathbb{P}(V)$.

Proposition 5.35. La congruence algébrique est une relation d'équivalence sur $DBAS \cup DBPA$.

DÉMONSTRATION.

- La réflexivité ainsi que la symétrie de cette relation sont vérifiées par définition.
- Pour la transitivité, soient db_p^\star , $db_{p'}^{\star'}$ et $db_{p''}^{\star''}$, avec $p, p', p'' \in \mathbb{P}(V)$ et $\star, \star', \star'' \in \{-, +, 0\}$, des demi-branches telles que $db_p^\star \sim_{alg} db_{p'}^{\star'}$ et $db_{p'}^{\star'} \sim_{alg} db_{p''}^{\star''}$. Par la remarque (5.34), on obtient $p = p' = p''$.

Soit maintenant P un polynôme réel non nul. db_p^\star et $db_{p'}^{\star'}$ étant algébriquement congruentes, et quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer que $U(P)$ est compatible avec ces deux demi-branches. Par ailleurs, comme $db_{p'}^{\star'}$ et $db_{p''}^{\star''}$ sont aussi algébriquement congruentes, alors un seul parmi les $U(P)$ et $U(-P)$ est compatible avec ces deux demi-branches, et comme $U(P)$ est déjà compatible avec $db_{p'}^{\star'}$, alors il le sera avec $db_{p''}^{\star''}$. donc $U(P)$ est compatible avec db_p^\star et $db_{p''}^{\star''}$. En faisant varier P dans A^\star , on obtient : $db_p^\star \sim_{alg} db_{p''}^{\star''}$, ce qui prouve que \sim_{alg} est transitive, et donc une relation d'équivalence.

NOTATION 5.36.

On note par $DBB(p)$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $DBAS \cup DBPA$, modulo l'équivalence algébrique, et par DBB , la réunion disjointe :

$$DBB := \bigsqcup_{p \in \mathbb{P}(V)} DBB(p).$$

Définition 5.37 (DEMI-BRANCHE DE BÉZOUT).

1. Un élément de DBB est appelé une **demi-branche de Bézout**. Un tel élément sera noté db_p^\star , avec $\star \in \{-, +, 0\}$.
2. Un élément de DBB est dit une **demi-branche de Bézout algébrique** s'il est représenté par une demi-branche algébrique signée (i.e., $\star \in \{-, +\}$), sinon il est dit **demi-branche de Bézout pseudo-algébrique** (i.e., $\star = 0$).

Proposition 5.38 (COMPATIBILITÉ AVEC LES SEMI-ALGÈBRIQUES). Soient db_p^\star une demi-branche (algébrique signée ou pseudo-algébrique) et U un semi-algébrique compatible avec db_p^\star . Si $db_{p'}^{\star'}$ est une autre demi-branche telle que $db_p^\star \sim_{alg} db_{p'}^{\star'}$, alors U est également compatible avec $db_{p'}^{\star'}$.

5.6 Correspondance : Demi-Branches de Bézout-Ultrafiltres-Ordres

Théorème 5.39. Soit db_p^\star une demi-branche de Bézout. Alors l'ensemble :

$$\mathcal{F}(db_p^\star) := \{U \in SA(V), U \text{ compatible avec } db_p^\star\},$$

est un ultrafiltre de rang maximal sur V .

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que $\mathcal{F}(db_p^*)$ ne dépend pas des représentants de db_p^* mais de db_p^* elle-même (voir proposition (5.38)).

Vérifions maintenant les axiomes des ultrafiltres.

(F0) : Il est clair que V est compatible avec toutes les demi-branches de Bézout au sens de la définition (5.31), donc $\mathcal{F}(db_p^*) \neq \emptyset$.

(F1) : Soient $U, U' \in \mathcal{F}(db_p^*)$, alors $U \cap U' \in \mathcal{F}(db_p^*)$ (proposition (5.17)).

(F1') : Par la proposition (5.17) toujours, tout semi-algébrique compatible avec $\mathcal{F}(db_p^*)$ contient un ouvert non vide, donc $\emptyset \notin \mathcal{F}(db_p^*)$.

(F2) : Soient $U \in \mathcal{F}(db_p^*)$ et $U' \in SA(V)$ tel que $U \subset U'$. Alors suivant le fait que db_p^* soit algébrique signée ou pseudo-algébrique, U contient un drapeau représentant cette demi-branch, et donc U' contient ce même représentant, ce qui prouve que U' est compatible avec db_p^* , et donc $U' \in \mathcal{F}(db_p^*)$.

(F3') : Pour le cas algébrique signé, soit $flag(db_p^*)$ un représentant de db_p^* . Soit $U \in SA(V)$. Comme U est une combinaison booléenne de semi-algébriques principaux de la forme $U(g)$, avec $g \in A$, donc d'après la proposition (5.23), un seulement des ensembles $flag(db_p^*) \cap U$ ou $flag(db_p^*) \cap (V \setminus U)$ est compatible avec db_p^* .

Pour le cas pseudo-algébrique, soient db_p^0 une demi-branch de Bézout pseudo-algébrique et $db_p = (\phi :]0, 1[\rightarrow V)$ un représentant. Soit U un semi-algébrique de V . Si g_1, \dots, g_n est un ensemble des polynômes intervenant dans l'écriture de U , i.e., U est combinaison booléenne des $U(g_1), \dots, U(g_n)$, alors l'ensemble $V \setminus Z(g_1 \dots g_n)$ est un ouvert dense dans V ayant un nombre fini de composantes connexes. Et comme db_p est pseudo-algébrique (en particulier non algébrique), alors $\exists \epsilon \in]0, 1[$ tel que $\phi(]0, \epsilon[)$ soit inclus dans une seule de ces composantes connexes, disons C . De plus, comme un seul parmi les ensembles U et $V \setminus U$ contient C , donc ce même semi-algébrique est un élément de $\mathcal{F}(db_p^*)$.

Définition 5.40 (ULTRAFILTRE GÉOMÉTRIQUE SUR V). Tout ultrafiltre de la forme $\mathcal{F}(db_p^*)$ est appelé *ultrafiltre géométrique* de $SA(V)$.

Corollaire 5.41. Soit db_p^* une demi-branch de Bézout. Alors l'ensemble :

$$\wp(db_p^*) := \{g \in K, U(g) \text{ compatible avec } db_p^*\},$$

est un ordre sur K .

Définition 5.42 (ORDRE GÉOMÉTRIQUE SUR K). Tout ordre $\wp(db_p^*)$ obtenu de cette façon est appelé *ordre géométrique* sur K .

REMARQUE 5.43.

Il est à noter que pour toute demi-branch de Bézout db_p^* et tout polynôme réel $g \in A^*$, on a :

$$U(g) \text{ compatible avec } db_p^* \iff V(g) \text{ compatible avec } db_p^*.$$

(Voir proposition (10.60)).

Théorème 5.44 (VOIR [AGR1] ET [AGR2]). Tout ordre de $\mathbb{R}(x, y)$ est géométrique, i.e., issu d'une demi-branch.

5.7 Un mot sur les éventails de $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$

Proposition 5.45 (INDICE DE STABILITÉ DE $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$). L'indice de stabilité de l'espace d'ordres $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$ du corps $\mathbb{R}(x, y)$ est égal à 2.

Corollaire 5.46 (EVENTAILS DE $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$). Tout éventail de l'espace d'ordres $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$ possède 1, 2 ou 4 éléments.

Définition 5.47 (ORDRE (NON)ARCHIMÉDIEN). Un élément d'un espace d'ordres est dit **archimédien** s'il n'appartient à aucun éventail non trivial, en particulier à aucun éventail de 4 éléments.

NOTE 5.48.

La caractérisation des éventails de 4 éléments d'un espace d'ordres dépend donc de la caractérisation de ses ordres non archimédiens.

La proposition suivante nous donne la caractérisation d'une classe importante d'éventails de 4 éléments de $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$.

Proposition 5.49 (EVENTAILS DE 4 ÉLÉMENTS DE $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$). Soient db_p et db'_q deux demi-branches algébriques distinctes, supportées sur une même courbe algébrique irréductible réelle plane $\mathcal{C} := (\pi = 0)$ (p et q , éventuellement égaux, sont des points du projectif de \mathcal{C}), (db_p^-, db_p^+) et (db'_q, db'_q^+) les couples des demi-branches de Bézout algébriques signées associées (suivant l'orientation choisie du plan). On note, respectivement, par $(\wp(db_p^-), \wp(db_p^+))$ et $(\wp(db'_q), \wp(db'_q^+))$ les couples d'ordres de $\mathbb{R}(x, y)$ associés à ces demi-branches signées. Alors l'ensemble :

$$\left\{ \wp(db_p^-), \wp(db_p^+), \wp(db'_q), \wp(db'_q^+) \right\},$$

est un éventail de 4 éléments de $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$.

INDICATION. En effet, il suffit de vérifier que les ordres associés aux demi-branches algébriques signées sont non archimédiens et que le produit de tous ces éléments est égal à $1 \in G_{\mathbb{R}(x,y)}$.

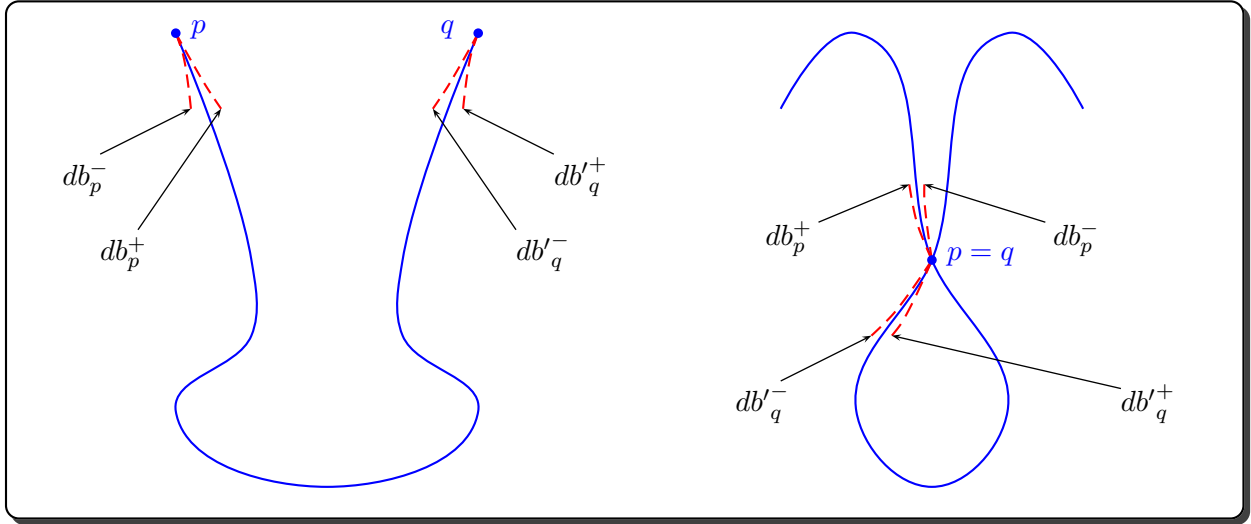


FIGURE 2 – Exemples d'éventails de 4 éléments de $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$. A gauche, un éventail composé de 4 ordres centrés en deux points infinis distincts d'une courbe algébrique, et à droite les ordres sont centrées en un même point fini.

Troisième partie

Principes Locaux-Globaux et Conjecture pp

Sommaire

6	Formules pp et Conjecture pp	54
6.1	Généralités - Définitions	54
6.1.1	Notion de formule pp	54
6.1.2	Formules pp dans le langage des groupes spéciaux	55
6.1.3	Conjecture pp	56
6.2	Evolution de la conjecture pp	57
6.2.1	Conjecture pp pour les espaces d'ordres	57
6.2.2	Conjecture pp pour les formules pp	58
7	Deux applications du théorème d'isotropie étendu	60
7.1	Théorème d'isotropie étendu	60
7.2	Principe local-global de séparation	61
7.2.1	Définitions	61
7.2.2	Théorème de séparation	61
7.2.3	Contre-exemple : Cas non constructible	63
7.3	Principe local-global de principalité	64
8	Contre-exemples combinatoires à la conjecture pp	66
8.1	Généralités et résultats préliminaires	66
8.1.1	Formules produits de rang n	66
8.1.2	Sur la courbe $\mathcal{C} = (x^2 + y^2 = 3)$	67
8.1.3	Description géométrique des éléments de X	68
8.1.4	Représentation par les 2-formes	69
8.2	Contre-exemples à la conjecture pp	71
8.2.1	Construction des paramètres	71
8.2.2	Notation des arcs	72
8.2.3	Théorème principal	73
8.2.4	Un mot sur la définition de $d := -\pi_2 \dots \pi_{n-1} \cdot \tau_1 \dots \tau_n$	75
8.3	Preuve du théorème principal	75
8.3.1	Vérification locale de Φ	75
8.3.2	Non vérification globale de Φ	79

6 Formules *pp* et Conjecture *pp*

Mots-clés : Principes locaux-globaux, langages de premier ordre (élémentaires), langage des groupes spéciaux, termes, formules élémentaires, atomes, énoncés, formule *pp*, interprétation d'une formule dans une structure, principe local-global, conjecture *pp*, espaces d'ordres, théorème structurel, limites inductives, formules sans produits linéaires (PF1R).

Références : [AT], [DMM], [GM1], [GM2], [Hod], [Mar12].

Résumé

*L'un des deux principaux thèmes considérés dans cette Thèse est celui de l'étude des **principes locaux-globaux** dans la théorie abstraite des formes quadratiques sur les espaces d'ordres/groupes spéciaux, pour être plus précis, l'étude de ce qu'on appelle la **conjecture *pp***, pour ainsi dire la recherche de propriétés, exprimables dans le langage élémentaire des groupes spéciaux, vérifiant, ou pas, le principe local-global dans une structure donnée (espace d'ordres abstrait).*

*Nous commencerons cette section par rappeler les concepts de **formules élémentaires**, **formules *pp*** et **d'énoncé *pp***, qu'on appliquera en seconde partie au langage des groupes spéciaux pour finir par rappeler les avancées et résultats les plus importants relatifs à la conjecture *pp*.*

6.1 Généralités - Définitions

La conjecture *pp* est formulée pour la première fois vers la fin des années 90, dans un article publié par Marshall (voir [Mar12]), suite aux réflexions de Marshall, Dickmann et Miraglia (voir aussi [DM]) sur la place qu'occupe le langage des groupes spéciaux dans la théorie des espaces d'ordres, en particulier, sur l'avantage qu'aurait cette théorie en disposant d'outils élémentaires (algébrique et modèle-théorique) pour traduire des propriétés forme-quadratiques, algébriques, géométriques, combinatoires ou même topologiques sur les espaces d'ordres à l'aide de formules élémentaires. Le théorème d'isométrie de Pfister, celui de la représentation des formes et des éventails ainsi que les théorèmes de l'isotropie et de l'isotropie étendu en sont des exemples de propriétés exprimables dans le langage des groupes spéciaux, par un type particulier de ces formules, les *formules *pp**. Ils illustrent également l'avantage de restreindre l'étude des propriétés globales d'une structure (espace d'ordres) aux sous-structures (sous-espaces finis) ; on parle donc de *principes locaux-globaux (LG)*.

Deux questions se posent donc naturellement :

QUESTION 6.1.

Dans la théorie des espaces d'ordres/groupes spéciaux :

- Une formule vérifiant le principe LG est-elle forcément *pp* ?
- Une formule *pp* vérifie-t-elle systématiquement le principe LG ?

Certes, posé dans ces termes, le problème est trop ambitieux, mais il est tout de même intéressant de savoir, au moins dans certaines situations, quel lien existe-t-il entre ces formules particulières et le principe de passage de l'échelle locale à l'échelle globale dans ces théories.

6.1.1 Notion de formule *pp*

REMARQUE 6.2.

Le langage utilisé ici est celui des groupes spéciaux (voir définition (3.1)). Pour les notions élémentaires évoquées plus loin dans cette section, telles que : variables (libres ou liées), formules, termes, validité d'une formule dans une structure, occurrence d'une variable dans une formule ..., [Hod] (section §1.3) constitue une référence suffisante pour une lecture claire de la section.

Définitions 6.3 (FORMULE *pp*).

1. On appelle **énoncé** (ou **phrase**) toute formule ayant toutes ses variables quantifiées.
2. On appelle **formule *pp*** (**positive-primitive**), toute conjonction finie de formules atomiques dont (toutes) les variables sont quantifiées existentiellement.
 Un énoncé Φ ayant $\underline{a} := (a_1, \dots, a_m)$ comme paramètres et $\underline{t} := (t_1, \dots, t_n)$ comme variables se note $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$, où $\varphi(\underline{t}, \underline{a})$ est une conjonction finie de formules atomiques, du langage utilisé (groupes spéciaux).
 Dans le cas où Φ est une formule *pp*, on la note $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$, et si le contexte est clair, on gardera la notation $\Phi(\underline{a})$, sans référence à ses variables quantifiées.

Définitions 6.4. Soient \mathcal{L} un langage de premier ordre et $\mathcal{L}(C)$ une extension de \mathcal{L} par un ensemble de symboles de constantes, \mathcal{T} une théorie axiomatisable dans \mathcal{L} et \mathcal{M} un modèle de \mathcal{T} . Soit également $\Phi(\underline{a}) := \varphi(\underline{t}, \underline{a})$ un énoncé de $\mathcal{L}(C)$, ayant $\underline{a} := (a_1, \dots, a_m)$ comme paramètres et $\underline{t} := (t_1, \dots, t_n)$ comme variables (quantifiées). On appelle :

1. **Interprétation** de $\Phi(\underline{a})$ dans \mathcal{M} , toute écriture $\Phi(\underline{A})$, où $\underline{A} = (A_1, \dots, A_m)$ est un choix de valeurs pour les paramètres \underline{a} dans \mathcal{M} . Dans ce cas, on dit qu'on **assigne** aux paramètres \underline{a} les valeurs \underline{A} .
2. **Témoin de vérité** ou **solution** de $\Phi(\underline{A}) = \varphi(\underline{t}, \underline{A})$ dans \mathcal{M} , tout n -uplet $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{M}^n$ tel que $\varphi(\underline{T}, \underline{A})$ soit *satisfaite* (on dit aussi *valide*). On note :

$$\mathcal{M} \models \varphi(\underline{T}, \underline{A}).$$

L'ensemble des solutions d'une telle formule (interprétation) dans \mathcal{M} est noté $\phi^{\mathcal{M}}(\cdot, \underline{A})$.

6.1.2 Formules *pp* dans le langage des groupes spéciaux

Fixons-nous, pour toute la suite de cette section, comme langage, celui des groupes spéciaux, \mathcal{L}_{GS} , et comme théorie, celle des groupes spéciaux réduits GSR .

L'ensemble $\mathcal{Term}(\mathcal{L}_{GS}(C))$, des termes, est composé des produits finis de variables et constantes. Quant aux formules atomiques, elles sont de l'une des écritures suivantes :

1. $a = b$.
2. $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle$.

où a , b , c et d sont des termes.

Lemme 6.5. Les relations binaire $=$ et quaternaire \equiv sont définissables, sans quantificateurs, à partir de la représentation par les 2 formes. Plus précisément, pour tous termes a , b , c et d , on a :

- i) $a = b \Leftrightarrow ab \in D(1, 1)$.
- ii) $\langle a, b \rangle \equiv \langle c, d \rangle \Leftrightarrow (ac \in D(1, ab) \wedge ac \in D(1, cd))$.

DÉMONSTRATION. En utilisant la définition de la représentation par les 2 formes et des axiomes (SG3), (SG4), (SG5) et (RED) des groupes spéciaux réduits.

Corollaire 6.6. Toute formule *pp* $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$, du langage \mathcal{L}_{GS} des groupes spéciaux, ayant $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ comme paramètres et $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ comme variables quantifiées existentiellement, peut s'écrire :

$$\Phi(\underline{a}) = \exists \underline{t} \bigwedge_{i=1}^{i=k} P_i(\underline{a}, \underline{t}) \in D(1, Q_i(\underline{a}, \underline{t})),$$

où $P_i(\underline{a}, \underline{t})_i$ et $Q_i(\underline{a}, \underline{t})_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) sont des termes, i.e., des produits finis de variables t_1, \dots, t_n et de paramètres a_1, \dots, a_m , et éventuellement des constantes -1 et 1 .

6.1.3 Conjecture *pp*

Proposition 6.7. Soient (X, G) un espace d'ordres abstrait, a un élément de G et $\phi, \psi, \phi_1, \dots, \phi_n$ des formes sur G . Alors les propriétés :

- i) $\phi \equiv \psi$ (Isométrie),
- ii) $a \in D(\phi)$ (Représentation par une forme),
- iii) ϕ est isotrope (Isotropie d'une forme),
- iv) $\bigcap_{i=1}^n D(\phi_i) \neq \emptyset$ (théorème d'isotropie étendu),

sont toutes exprimables, dans le langage des groupes spéciaux, par des formules *pp* sur (X, G) .

DÉMONSTRATION. Voir [Mar12] et [Mar14].

Définition 6.8. Soient (X, G) un espace d'ordres, $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$ une formule *pp* sur (X, G) ($\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ ses variables et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ ses paramètres) et $\underline{A} = (A_1, \dots, A_m) \in G^m$ un m -uplet de valeurs des paramètres. Pour tout sous-espace (Y, H) de (X, G) , on note par $\underline{A}/H = (A_1/H, \dots, A_m/H)$ la classe de \underline{A} dans H^m .

1. On dit que $\Phi(\underline{A})$ **vérifie le principe local-global** dans (X, G) , s'il y a équivalence entre :
 - i) $(X, G) \models \Phi(\underline{A})$.
 - ii) $(Y, H) \models \Phi(\underline{A}/H)$, pour tout sous-espace fini (Y, H) de (X, G) .
2. On dit que $\Phi(\underline{a})$ **vérifie le principe local-global** dans (X, G) s'il en est de même de toutes ses interprétations dans G .

Proposition 6.9. Toutes les formules *pp* traduisant, dans le langage des groupes spéciaux, les propriétés citées dans la proposition (6.7) vérifient le principe local-global dans tout espace d'ordres (X, G) .

DÉMONSTRATION. Voir [Mar12] et [Mar14].

QUESTION 6.10 (CONJECTURE PP).

Est-il vrai que toute formule *pp* vérifie le principe local-global dans tout espace d'ordres ?

Cette question est beaucoup trop générale pour lui espérer une réponse positive, et d'ailleurs, quelques années après l'avoir énoncée, Marshall réussit à trouver un premier contre-exemple, en utilisant un type très particulier de formules *pp* (voir section §8). Il est donc tout à fait naturel de se poser la question de classification des formules *pp* et des espaces d'ordres pour lesquels on a une réponse affirmative *partielle* à cette question (conjecture *pp*).

Définition 6.11 (FORMULES ET ESPACES VÉRIFIANT LA CONJECTURE PP).

1. On dit qu'une **formule *pp* vérifie la conjecture *pp***, si elle vérifie le principe local-global dans tout espace d'ordres.
2. On dit qu'un **espace d'ordres vérifie la conjecture *pp***, si toute formule *pp* vérifie le principe local-global dans cet espace.

On peut ainsi décomposer la conjecture *pp* en les deux questions suivantes :

QUESTION 6.12 (CONJECTURE PP POUR LES FORMULES PP).

1. Quelles sont les \mathcal{L}_{SG} -formules *pp* vérifiant la conjecture *pp* ?
2. Etant donnée une \mathcal{L}_{SG} -formule *pp*, $\Phi(\underline{a})$, quels sont les espaces d'ordres sur lesquels $\Phi(\underline{a})$ vérifie le principe local-global ?

QUESTION 6.13 (CONJECTURE PP POUR LES ESPACES D'ORDRES).

1. Quels sont les espaces d'ordres vérifiant la conjecture *pp* ?
2. Etant donné un espace d'ordres, (X, G) , quelles sont les formules *pp* vérifiant le principe local-global sur (X, G) ?

6.2 Evolution de la conjecture pp

6.2.1 Conjecture pp pour les espaces d'ordres

A. Passage aux sous-espaces. On rappelle que tout sous-espace d'un espace d'ordres est muni lui aussi d'une structure naturelle d'espace d'ordres (voir théorème (2.14)).

Théorème 6.14. Soit (X, G) un espace d'ordres et $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$ une formule pp . Alors on a l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, où :

- i)* $\Phi(\underline{a})$ ne vérifie pas le principe local-global dans (X, G) .
- ii)* Il existe un sous-espace (Y, H) de (X, G) , minimal pour l'inclusion, dans lequel $\Phi(\underline{a})$ ne vérifie pas le principe local-global.

En particulier, si \underline{A} est une assignation de valeurs aux paramètres \underline{a} dans G , alors il existe un sous-espace (Y, H) de (X, G) , minimal pour l'inclusion, tel que (i) implique (ii) , dans ce qui suit :

- i)* $(X, G) \not\models \Phi(\underline{A})$.
- ii)* $(Y, H) \not\models \Phi(\underline{A}_H)$.

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar12] - Proposition 2.2 ou [AT] - Lemme 7).

Théorème 6.15 (STABILITÉ PAR PASSAGE AUX SOUS-ESPACES). Soit (Y, H) un sous-espace d'un espace d'ordres (X, G) . Si (X, G) vérifie la conjecture pp , alors il en est de même de (Y, H) .

DÉMONSTRATION. (Voir [AT] - proposition 6).

B. Théorème structurel.

Théorème 6.16 (STABILITÉ PAR SOMME DIRECTE). Soient $(X_1, G_1), (X_2, G_2)$ deux espaces et $(X, G) = (X_1, G_1) \oplus (X_2, G_2)$ leur somme directe. On a équivalence entre :

- i)* (X_1, G_1) et (X_2, G_2) vérifient la conjecture pp .
- ii)* (X, G) vérifie la conjecture pp .

Théorème 6.17 (STABILITÉ PAR EXTENSION). Soient (X, G) un espace d'ordres et Δ un groupe multiplicatif d'exposant 2. On a équivalence entre :

- i)* (X, G) vérifie la conjecture pp .
- ii)* $(X, G)[\Delta]$ vérifie la conjecture pp .

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar12] - Proposition 2.3 ou [AT] - Lemme 3).

REMARQUE 6.18 (CAS DE L'ESPACE ATOMIQUE).

L'espace atomique (E, \mathcal{O}) vérifie trivialement la conjecture pp .

Corollaire 6.19 (ESPACES FINIS/ÉVENTAILS).

- i)* Tout espace d'ordres fini vérifie la conjecture pp .
- ii)* Tout éventail vérifie la conjecture pp .

DÉMONSTRATION.

- i)* Par le théorème (6.16) ainsi que la remarque (6.18). Tout espace d'ordres fini est somme finie d'espaces atomiques.
- ii)* Par le théorème (6.17) ainsi que la remarque (6.18). Tout éventail est extension de l'espace atomique.

Corollaire 6.20 (CAS DES ESPACES DE TYPE FINI). *De façon plus générale, tout espace d'ordres de type fini (dit aussi de longueur de chaîne finie) vérifie la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. Ce corollaire est conséquence des théorèmes (6.16), (6.17) et de la définition des espaces de type fini.

C. Stabilité par limites inductives.

Théorème 6.21 (STABILITÉ PAR LIMITE INDUCTIVE). *Soit $\{(X_i, G_i), i \in I\}$ un système inductif d'espaces d'ordres (finis). Alors sa limite inductive $\varinjlim_{i \in I} (X_i, G_i)$ vérifie la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. (Voir [AT] - Corollaire 5 et Lemme 6).

D. Cas particuliers d'espaces vérifiant la conjecture *pp*.

Théorème 6.22. *Tout espace d'ordres SAP (voir remarque (2.51)) vérifie la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar12] - Proposition 2.3).

Théorème 6.23. *L'espace d'ordres $(X_{\mathbb{Q}(x)}, G_{\mathbb{Q}(x)})$ vérifie la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. (Voir [DMM] - Théorème 4.1).

F. Espaces de corps de fonctions de coniques rationnelles. Soit $\mathcal{C} := (\pi = 0)$ une conique rationnelle irréductible sur \mathbb{Q} , i.e., ensemble des zéros rationnels de π (polynôme irréductible du second degré de $\mathbb{Q}[x, y]$). On note par K le corps de fonctions de \mathcal{C} (K est donc une extension algébrique simple de $\mathbb{Q}(x)$), et par (X_K, G_K) l'espace d'ordres de K .

Théorème 6.24. *Si \mathcal{C} est sans points rationnels, alors (X_K, G_K) ne vérifie pas la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. (Voir [GM1] - Théorème 6 et Théorème 9).

Dans la section §8, ci-dessous, nous généraliserons ce contre-exemple en utilisant des formules plus complexes.

G. Espace du corps $\mathbb{R}(x, y)$.

Théorème 6.25. *L'espace d'ordres $(X_{\mathbb{R}(x, y)}, G_{\mathbb{R}(x, y)})$ ne vérifie pas la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. (Voir [GM2] - Théorème 1, p. 198).

6.2.2 Conjecture *pp* pour les formules *pp*

A. Formules ayant au plus une variable.

Théorème 6.26. *Toute formule *pp* $\Phi(\underline{a}) := \exists t \varphi(t, \underline{a})$ ayant une unique variable quantifiée t vérifie la conjecture *pp*.*

DÉMONSTRATION. (Voir [AT] - Corollaire 4 ou [Mar12] - Proposition 2.4).

Une telle formule peut toujours s'écrire comme conjonction de deux formules *pp*, dont l'une est sans variables quantifiées et l'autre est un cas particulier du théorème de l'isotropie étendu.

B. Formules $PF1R$ (de Marshall).

Définition 6.27 (FORMULE LINÉAIRE (1–RELIÉE) SANS PRODUITS). Soit (X, G) un espace d'ordres abstrait.

Une formule pp , $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$, est dite **linéaire (1–reliée) sans produits**²⁷ si :

1. Les seules formules atomiques composant $\varphi(\underline{t}, \underline{a})$ sont de l'une des trois formes suivantes ;
 Type (1) : $t_i \in D(A, B)$.
 Type (2) : $1 \in D(A' t_{i'}, B' t_{j'})$, avec $i' \neq j' \in \{1, \dots, n\}$.
 Type (3) : $t_{i''} \in D(A'' t_{j''}, B'' t_{k''})$, avec $i'' \neq j'' \neq k'' \neq i'' \in \{1, \dots, n\}$.
 où $a = (a_1, \dots, a_m)$ sont les paramètres, $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ sont les variables quantifiées existentiellement, et A, B, A', B', A'' et B'' sont des produits finis des paramètres a_1, \dots, a_m .
2. On admet un nombre quelconque d'atomes de type (1).
3. Pour tout couple d'indices (i, j) , tel que $i \neq j$, il n'existe qu'un unique atome dans lequel t_i et t_j apparaissent (ont une occurrence).

Théorème 6.28. *Toute formule pp , sans produits et linéaire (1–reliée), vérifie la conjecture pp sur (X, G) .*

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar14] - Théorème 2.1).

²⁷. Celle-ci est une traduction directe de la définition anglaise donnée par Marshall : *Product-free and one-related*.

7 Deux applications du théorème d'isotropie étendu

Mots-clés : Théorème d'isotropie étendu, formules *pp*, ouverts-fermés (basiques, principaux et constructibles), séparation des constructibles, principalité des basiques, formes de Pfister.

Références : [ABR], [Mar4], [Mar6], [Mar7] et [Mar8]

Résumé

Dans cette section, nous nous intéresserons aux propriétés suivantes :

- Séparation de sous-ensembles constructibles d'un espace d'ordres.
- "Principalité" des ouverts-fermés de base d'un espace d'ordres, i.e., leur génération par un seul élément.

*Nous montrons que ces propriétés s'expriment dans le langage de premier ordre des groupes spéciaux par des formules *pp* d'un type spécial, pour lesquelles un résultat de Marshall – le **Théorème d'Isotropie Étendu** – prouve la validité du principe local-global. Les propriétés mentionnées plus haut vérifient donc ce principe.*

7.1 Théorème d'isotropie étendu

Soit, pour toute la suite de cette section, (X, G) un espace d'ordres abstrait.

NOTATIONS 7.1.

Soit (Y, H) un sous espace de (X, G) .

1. Pour tout élément $g \in G$, on note par $g|_Y$ la restriction de g à Y .
2. Pour toute forme $\phi := \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, à coefficients dans G , on note par $\phi|_Y$ la restriction de ϕ à Y , i.e., $\phi|_Y = \langle a_1|_Y, \dots, a_m|_Y \rangle$ et on pose $D|_Y(\phi) := D|_Y(\phi|_Y)$.
3. Pour tous éléments $a_1, \dots, a_n \in G$, on note $U|_Y(a_1, \dots, a_n) := U(a_1, \dots, a_n) \cap Y$.

Théorème 7.2 (ISOTROPIE). Soit ϕ une forme ayant ses coefficients (entrées) dans G . Il est connu que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) ϕ est isotrope sur (X, G) .
- ii) $\phi|_Y$ est isotrope sur tout sous espace d'ordres (Y, H) de (X, G) .
- iii) $\phi|_Y$ est isotrope sur tout sous espace d'ordres fini (Y, H) de (X, G) .

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar4] - Théorème 1.4).

Théorème 7.3 (ISOTROPIE ÉTENDU). Soient ϕ_1, \dots, ϕ_n , où $n \in \mathbb{N}^*$, des formes ayant leurs coefficients dans G . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\bigcap_{i=1}^{i=n} D(\phi_i) \neq \emptyset$ dans (X, G) .
- ii) $\bigcap_{i=1}^{i=n} D|_Y(\phi_i) \neq \emptyset$ dans tout sous-espace d'ordres (Y, H) de (X, G) .
- iii) $\bigcap_{i=1}^{i=n} D|_Y(\phi_i) \neq \emptyset$ dans tout sous-espace d'ordres fini (Y, H) de (X, G) .

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar6] - Théorème 2.1).

7.2 Principe local-global de séparation

Le principe local-global de *séparation* est apparu pour la première fois dans [ABR] (Chapitre 4) - Théorème 7.12, où il est démontré, grâce à des outils élémentaires de la théorie des espaces d'ordres, que la séparation des sous-ensembles *constructibles* d'un espace d'ordres obéit au mécanisme local-global. Pour ce faire, les auteurs décomposent la preuve en deux parties :

- Réduction au cas des espaces de longueur de chaîne finie.
- Application du *théorème structurel*, qui permet d'utiliser la récurrence.

Nous donnons ici une preuve de nature différente, consistant à écrire, dans le langage des groupes spéciaux, l'énoncé de *séparation* de deux ensembles constructibles de X , ce qui suffit pour conclure par le théorème de l'isotropie étendu.

7.2.1 Définitions

Définition 7.4 (SÉPARATION ET ENSEMBLES SÉPARABLES). Soient (X, G) un espace d'ordres abstrait, A et B deux sous ensembles non vides disjoints de X et g un élément de G .

On dit que :

1. g **sépare** A et B dans (X, G) et on note $A|_{(g, X)} B$ si, et seulement si :

$$(A \subset U(g) \bigwedge B \subset U(-g)) \vee (A \subset U(-g) \bigwedge B \subset U(g)).$$

2. A et B sont **séparables** dans (X, G) si, et seulement si, il existe un élément $g \in G$ qui les sépare dans (X, G) .

Définition 7.5 (SÉPARATEUR). On appelle **séparateur** de A et B dans (X, G) l'ensemble de tous les éléments $g \in G$ tels que g sépare A et B dans (X, G) . On note cet ensemble par $sep_X(A, B)$.

7.2.2 Théorème de séparation

Pour montrer le théorème de séparation (7.9) aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 7.6. Soient Y_1, \dots, Y_l (où $l \in \mathbb{N}^*$) des sous-ensembles non vides de X . On a donc :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{i=l} Y_i \right)^\perp = \bigcap_{i=1}^{i=l} Y_i^\perp. \quad (6)$$

DÉMONSTRATION. Immédiate par récurrence sur l et la définition de Y^\perp .

Lemme 7.7. Soient $g \in G$ et $\Phi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ une forme à coefficients dans G . On a :

$$-g \in D(\phi) \iff g \in D(-\phi),$$

où $-\phi := \langle -a_1, \dots, -a_n \rangle$.

DÉMONSTRATION. Corollaire de l'axiome (SG5) des groupes spéciaux sous sa forme généralisée :

$$\begin{aligned} -g \in D(\phi) &\iff \exists g_2, \dots, g_n \in G \text{ tel que } \langle -g, g_2, \dots, g_n \rangle \equiv \langle a_1, \dots, a_n \rangle \\ &\iff \exists g_2, \dots, g_n \in G \text{ tel que } -\langle -g, g_2, \dots, g_n \rangle \equiv -\langle a_1, \dots, a_n \rangle \\ &\iff \exists g_2, \dots, g_n \in G \text{ tel que } \langle g, -g_2, \dots, -g_n \rangle \equiv \langle -a_1, \dots, -a_n \rangle = -\phi \\ &\iff g \in D(-\phi). \end{aligned}$$

Pour finir, voici un petit lemme qui met en évidence le lien entre les formes de Pfister sur G et les ouverts-fermés constructibles de X .

Lemme 7.8. *Pour tous éléments $g, a_1, \dots, a_n \in G$, on a :*

- i) $U(a_1, \dots, a_n)^\perp = D(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)$.
- ii) $D(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)^\perp = U(a_1, \dots, a_n)$.
- iii) $U(a_1, \dots, a_n) \subset U(g) \iff g \in D(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)$.

DÉMONSTRATION. (Voir [Mar3] - lemme 3.1 et corollaire 3.2).

Théorème 7.9 (PRINCIPE LOCAL-GLOBAL DE SÉPARATION). *Soient A et B deux parties constructibles et non vides de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\text{sep}_X(A, B) \neq \emptyset$.
- ii) $\text{sep}_Y(A, B) \neq \emptyset$ pour tout sous-espace d'ordres (Y, H) de (X, G) .
- iii) $\text{sep}_Y(A, B) \neq \emptyset$ pour tout sous-espace d'ordres fini (Y, H) de (X, G) .

DÉMONSTRATION. Soient A et B deux sous-ensembles constructibles non vides de X . On peut donc écrire :

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{et} \quad B = B_1 \cup \dots \cup B_m,$$

où $A_i = U(a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i})$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $B_j = U(b_{j,1}, \dots, b_{j,s_j})$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ (voir paragraphe #2.2). Soient $\phi_i = \langle\langle a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i} \rangle\rangle$ et $\psi_j = \langle\langle b_{j,1}, \dots, b_{j,s_j} \rangle\rangle$ les formes de Pfister associées. On obtient ainsi (voir lemme (7.8)) :

$$A_i^\perp = D(\phi_i) \text{ et } B_j^\perp = D(\psi_j), \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Le lemme (7.6) donne :

$$A^\perp = \bigcap_{i=1}^{i=n} A_i^\perp = \bigcap_{i=1}^{i=n} D(\phi_i) \quad \text{et} \quad B^\perp = \bigcap_{j=1}^{j=m} B_j^\perp = \bigcap_{j=1}^{j=m} D(\psi_j).$$

Pour finir la preuve du théorème, on aura besoin du :

Lemme 7.10. *L'énoncé " $\text{sep}_X(A, B) \neq \emptyset$ " s'exprime dans le langage des groupes spéciaux par une formule pp.*

DÉMONSTRATION. En effet, $\text{sep}_X(A, B) \neq \emptyset \iff G \models \exists g (A \subset U(g) \wedge B \subset U(-g))$. On a donc, d'une part :

$$\begin{aligned} A \subset U(g) &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, A_i \subset U(g) \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, U(a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i}) \subset U(g) \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, g \in D(\langle\langle a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i} \rangle\rangle) \text{ (lemme (7.8))} \\ &\iff g \in \bigcap_{i=1}^{i=n} D(\phi_i). \end{aligned}$$

Par le même argument, utilisant les lemmes (7.8) et (7.7), on obtient par ailleurs :

$$B \subset U(-g) \iff g \in \bigcap_{j=1}^{j=m} D(-\psi_j).$$

Ceci se traduit par :

$$A|_{(g,G)} B \iff g \in \bigcap_{i=1}^{i=n} D(\phi_i) \text{ et } g \in \bigcap_{j=1}^{j=m} D(-\psi_j).$$

C'est-à-dire :

$$g \text{ sépare } A \text{ et } B \text{ dans } (X, G) \iff \bigcap_{i=1}^{i=n} D(\phi_i) \cap \bigcap_{j=1}^{j=m} D(-\psi_j) \neq \emptyset.$$

Par la caractérisation inductive de représentation par des formes de dimension supérieure ou égale à 3, le membre de droite de cette équivalence peut s'exprimer par une formule *pp*, et par le théorème d'isotropie étendu, l'énoncé "*Deux constructibles sont séparables dans (X, G)* " vérifie le principe local-global, ce qui finit la preuve du théorème (7.9).

REMARQUE 7.11.

Si A et B ne sont pas des constructibles de (X, G) , alors le théorème (7.9) n'est plus valable. Voici un contre-exemple.

7.2.3 Contre-exemple : Cas non constructible

Exemple 7.12 (CAS NON CONSTRUCTIBLE). Il existe un espace d'ordres (X, G) et deux sous-ensembles (non constructibles) $A, B \subset X$ tels que :

- i) $sep_X(A, B) = \emptyset$.
- ii) Pour tout sous-espace fini (Y, H) de (X, G) , $sep_Y(A, B) \neq \emptyset$.

DÉMONSTRATION. On considère l'espace d'ordres (X, G) du corps des fractions rationnelles sur \mathbb{Q} en une variable x , c'est-à-dire $X = X_{\mathbb{Q}(x)}$ et $G = \mathbb{Q}(x)^* / \sum (\mathbb{Q}(x)^*)^2$.

On définit deux sous-ensembles A' et B' de \mathbb{R} comme suit :

$$A' := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]4n, 4n + 1[\quad \text{et} \quad B' := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]4n + 2, 4n + 3[.$$

On leur associe les sous-ensembles A et B de X , composés, respectivement, des ordres définis par les points de A' et B' , *i.e.* :

$$A := \{\sigma_a^+, \sigma_a^- ; a \in A'\} \quad \text{et} \quad B := \{\sigma_b^+, \sigma_b^- ; b \in B'\}.$$

A et B sont donc des parties disjointes de X .

- i) $sep_X(A, B) = \emptyset$:

En effet, s'il existe un élément $g \in G$ qui sépare A et B , alors chaque représentant de g dans $\mathbb{Q}[x]$ posséderait un nombre infini de racines, ce qui est impossible car ces représentants sont des *polynômes*.

- ii) Pour tout sous-espace fini (Y, H) de (X, G) , $sep_Y(A, B) \neq \emptyset$:

Soit maintenant (Y, H) un sous-espace fini de (X, G) , qu'on décompose comme suit :

$$Y \cap A := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \quad \text{et} \quad Y \cap B := \{\beta_1, \dots, \beta_m\}.$$

On note par a_1, \dots, a_n les points respectifs définissant les ordres de $Y \cap A$, *i.e.*, les points a tels que σ_a^+ ou σ_a^- est dans $Y \cap A$.

De même, on note par b_1, \dots, b_m les points respectifs définissant les ordres de $Y \cap B$.

Il est clair, par construction de A et B , que les a_i et b_j sont deux-à-deux distincts, lorsque i et j parcourent respectivement $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, m\}$.

Montrons maintenant qu'il existe un polynôme $f \in \mathbb{Q}[x]$ représentant un élément $g \in G$ tel que $g|_Y \in \text{sep}|_Y(A, B)$.

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$ est constitué d'un nombre fini de composantes connexes, qui sont des segments ouverts. Notons par I_1, \dots, I_r ceux, parmi ces segments, qui ont des extrémités un point a_i et un point b_j .

Les segments I_k ($k \in \{1, \dots, r\}$) existent et sont donc des ouverts non vides si, *et seulement si* :

$$Y \not\subset A \quad \text{et} \quad Y \not\subset B.$$

Si $Y \subset A$ (ou $Y \subset B$), il suffit de prendre $f = 1$, et dans ce cas $g = f|_Y$ sépare $Y \cap A$ et $Y \cap B$, vu que $Y \cap B = \emptyset$. On fait de même si $Y \subset B$.

Dans le cas contraire, on choisit pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, un point rationnel $x_k \in I_k \cap \mathbb{Q}$. On pose finalement :

$$f(x) = \prod_{l=1}^{l=r} (x - x_l).$$

Quitte à multiplier $f(x)$ par ± 1 , on obtient :

$$f(a_i) > 0 \quad \text{et} \quad f(b_j) < 0 ; \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

par conséquent $g(\alpha_i) = +1$ et $g(\beta_j) = -1 ; \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}$, ce qui signifie que $g|_Y \in \text{sep}|_Y(A, B)$, et la preuve de l'exemple (7.12) suit.

7.3 Principe local-global de principalité

Soit U un ouvert-fermé basique d'un espace d'ordres (abstrait) (X, G) .

QUESTION 7.13 (PROBLÈME DE GÉNÉRATION MINIMALE DES BASIQUES).

Quel est le nombre minimal de générateurs a_1, \dots, a_n nécessaires pour l'écriture de U sous la forme $U(a_1, \dots, a_n)$?

Des avancées ont été faites, notamment dans [Mar7] (cas des spectres réels) et dans [Bro1] et [Bro2] (cas des variétés algébriques et analytiques réelles). Dans le contexte des espaces d'ordres, peu de choses sont connues à ce sujet.

Nous allons nous intéresser ici à la situation où U est exprimable à l'aide d'un seul *générateur* et nous montrerons que l'assertion "*U est principal*" peut s'exprimer à l'aide d'une formule *pp* qui, comme pour le cas de la séparation, est un cas particulier du *théorème de l'isotropie étendu*.

Théorème 7.14 (PRINCIPE DE "PRINCIPALITÉ" DES BASIQUES). *Etant donné un espace d'ordres (X, G) et un ouvert-fermé basique $U \subset X$. On a équivalence entre les affirmations suivantes :*

- i) U est un principal sur (X, G) .
- ii) U est un principal sur tout sous espace de (X, G) .
- iii) U est un principal sur tout sous espace fini de (X, G) .

DÉMONSTRATION. On se fixe un ouvert-fermé basique de (X, G) , disons $U := U(a_1, \dots, a_n)$ et on pose $\phi := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$, la forme de Pfister associée.

Dire que U est principal dans (X, G) signifie qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $U = U(g)$. Ceci se traduit par le système :

$$\exists g \begin{cases} g \in D_G(\phi) \\ a_i \in D_G(\langle 1, g \rangle), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{cases}$$

et par les axiomes **(SG4)** et **(SG5)** des groupes spéciaux (voir définition (3.2)), on obtient :

$$\exists g \begin{cases} g \in D_G(\phi) \\ g \in D_G(\langle -1, a_i \rangle), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

On pose :

$$\Sigma = \{\phi\} \cup \{\langle -1, a_i \rangle; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

On a ainsi l'équivalence :

$$U = U(g) \iff g \in \bigcap_{\theta \in \Sigma} D_G(\theta).$$

C'est-à-dire :

$$U \text{ est principal} \iff \bigcap_{\theta \in \Sigma} D_G(\theta) \neq \emptyset.$$

Le membre de droite de cette équivalence est un cas particulier du théorème de l'isotropie étendu, qui s'exprime donc comme une formule *pp*.

Par conséquent, l'énoncé "*un basique est principal*" vérifie le principe local-global, ce qui finit la preuve du théorème (7.14).

8 Contre-exemples combinatoires à la conjecture *pp*

Mots-clés : Contre-exemples à la conjecture *pp*, espaces d'ordres des coniques rationnelles, espaces 2-cycliques, formules produits de Marshall, construction combinatoire, comportement infinitésimal, comportement local des polynômes, intersection des courbes rationnelles planes.

Références : [GM1], [GM2], [Mar12], [Mar13], [Mar14].

Résumé

En 2003, et dans un papier non publié (voir [Mar13]), M. Marshall parvient à donner le premier contre-exemple à la conjecture *pp*, et pour ce faire, il utilise l'espace d'ordres du corps de fonctions de la courbe rationnelle définie par l'équation $x^2 + y^2 = 3$, c'est-à-dire le corps de fractions de l'anneau $\mathbb{Q}[x, y]/I$, où I est l'idéal principal de $\mathbb{Q}[x, y]$ engendré par le polynôme $x^2 + y^2 - 3$, et une formule d'un type étudié par l'auteur, appelé **formules produits**.

Marshall utilise pour illustrer son contre-exemple, une formule produit (que nous appelons ici **formule produit de rang 3**), la plus simple qui n'est pas **sans produits et 1-reliée** (i.e., *PF1R*²⁸), à savoir une formule qui s'exprime comme suit ;

$$d \in D(1, a_1) \cdot D(1, a_2) \cdot D(1, a_3) ; \quad \text{avec } a_3 = a_1 \cdot a_2.$$

Dans deux articles en collaboration avec P. Gladki, (voir [GM1] et [GM2]), il a été prouvé que la conjecture *pp* tombe à défaut dans un cas plus général, celui des espaces d'ordres des corps de fonctions de coniques rationnelles sans points rationnels, ainsi que dans le cas du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Les formules utilisées, jusqu'à lors, pour réfuter la conjecture demeurent toujours de la même classe, i.e., des formules produits de rang 3. Une question s'est vite imposée : Existe-t-il d'autres formules réfutant la conjecture *pp*, au moins dans ces deux cas connus ?

Nous tentons, dans la présente section, d'apporter une réponse positive à cette question, en construisant de nouveaux contre-exemples à la conjecture *pp* en utilisant comme espace d'ordres celui du corps de fonctions de la courbe " $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 3$ " et nous nous intéresserons au comportement de la conjecture sur la classe des formules produits de rang n quelconque. Ces contre-exemples se généralisent sans aucune difficulté aux cas des espaces d'ordres des corps de fonctions des coniques rationnelles étudiées dans [GM1] ainsi qu'au cas de l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$. Les techniques que nous utiliserons ici ne sont qu'une généralisation de celles utilisées par P. Gladki et Marshall dans [Mar13] et [GM1].

8.1 Généralités et résultats préliminaires

8.1.1 Formules produits de rang n

Les formules produits sont introduites et étudiées pour la première fois par M. Marshall (voir [Mar14]).

Définition 8.1 (FORMULE PRODUIT DE RANG n). Soit (X, G) un espace d'ordres abstrait. On appelle **formule produit de rang n** , où $n \in \mathbb{N}^*$, tout énoncé de la forme :

$$\Phi := d \in \prod_{i=1}^{i=n} D(1, a_i).$$

où d et $\underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \in G^n$ sont les paramètres de Φ .

REMARQUE 8.2.

Une telle formule se traduit, dans le langage des groupes spéciaux, comme une formule *pp*, $\Phi(\underline{a}, d) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a}, d)$, avec $\underline{t} := (t_1, \dots, t_n)$ et :

$$\Phi(\underline{a}, d) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a}, d) := \exists \underline{t} \left\{ \begin{array}{l} t_i \in D(1, a_i) ; \quad \forall i \in \{1; \dots; n\} \\ d = \prod_{i=1}^{i=n} t_i. \end{array} \right.$$

28. La terminologie *PF1R* signifie "product free and 1-related" (voir [Mar14] - Paragraphe #2, p. 5).

Vu que $(d = \prod_{i=1}^{i=n} t_i \Leftrightarrow t_n = d \cdot \prod_{i=1}^{i=n-1} t_i)$, on peut donc supprimer la variable t_n comme suit :

$$\Phi(\underline{a}, d) := \exists \underline{t}' \varphi'(\underline{t}', \underline{a}, d) := \exists \underline{t}' \left\{ \begin{array}{l} t_i \in D(1, a_i) ; \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ d \cdot \prod_{i=1}^{i=n-1} t_i \in D(1, a_n). \end{array} \right.$$

où $\underline{t}' := (t_1, \dots, t_{n-1})$.

REMARQUES 8.3.

Du point de vue de la conjecture *pp*, on distingue les niveaux suivants de complexité :

$n = 1$: Une telle formule s'écrit : $d \in D(1, a_1)$, qui est sans variables quantifiées, donc l'énoncé *pp* associé est un cas particulier du principe de représentation d'un élément par une 2 forme. Ces formules vérifient trivialement le principe local-global dans tout espace d'ordres abstrait.

$n = 2$: Si $d \in D(1, a_1) \cdot D(1, a_2)$ est une telle formule, alors elle peut s'écrire :

$$\exists t_1 \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in D(1, a_1) \\ d \cdot t_1 \in D(1, a_2). \end{array} \right.$$

Ce qui donne, en appliquant l'axiome **(SG5)** des groupes spéciaux :

$$\exists t_1 \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in D(1, a_1) \\ t_1 \in D(d, d \cdot a_2). \end{array} \right.$$

Cette dernière se traduit par :

$$D(1, a_1) \cap D(d, d \cdot a_2) \neq \emptyset ,$$

qui est un cas particulier du théorème d'isotropie étendu (voir théorème (??)).

De façon plus générale, les formules *pp* ne comportant qu'une seule variable vérifient la conjecture *pp* (voir théorème (6.26)).

$n = 3$: On retrouve les formules évoquées précédemment et utilisées dans [Mar13], [GM1] et [GM2] pour construire les premiers contre-exemples à la conjecture *pp*.

$n \geq 4$: Cas auquel nous nous intéresserons dans la suite de cette section.

8.1.2 Sur la courbe $\mathcal{C} = (x^2 + y^2 = 3)$

NOTATIONS 8.4.

Considérons le polynôme $P(x, y) = x^2 + y^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x, y]$ et notons par :

1. $\mathcal{C} := (x^2 + y^2 = 3)$ la courbe des zéros réels de P (couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(a, b) = 0$).
2. A l'anneau des fonctions régulières sur \mathcal{C} , i.e. :

$$A := \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + y^2 - 3) = \mathbb{Q}[x] \oplus \mathbb{Q}[x] \cdot \sqrt{3 - x^2}$$

3. K le corps de fractions de A , i.e. :

$$K := \mathbb{Q}(x) \oplus \mathbb{Q}(x) \cdot \sqrt{3 - x^2}$$

4. (X, G) l'espace d'ordres de K , i.e., X est l'ensemble des ordres de K (domaine topologique) et $G = K^*/\sum (K^*)^2$ est son groupe spécial (domaine algébrique).
5. \bar{k} la classe d'équivalence dans G d'un élément $k \in K^*$.

6. Et enfin, pour tout sous espace (Y, H) de (X, G) , et tous éléments $k \in K^*$ et $g \in G$, on note par k_H (resp. g_H) leurs classes d'équivalence dans H , et si le contexte ne conduit pas à une confusion, on utilisera les notations k et g au lieu de k_H et g_H .

On choisira, pour toute la suite de cette section, une orientation sur le cercle \mathcal{C} (orientation trigonométrique par exemple). On a ainsi une notion de *points consécutifs*, *demi-branches consécutives* ... (voir section §10 pour un cas similaire).

REMARQUE 8.5.

Vu que, $\forall (p, q) \in A \times A^*$; $\frac{p}{q} = p \cdot q \cdot (\frac{1}{q})^2$, tous éléments $g \in G$ et $h \in H$ peuvent être représentés par des éléments de A^* , i.e., par des fonctions $p(x) + q(x) \cdot \sqrt{3 - x^2} \in A$. Ces fonctions peuvent être choisies sans sommes de carrés comme facteurs (voir proposition (8.6)).

Voici quelques propriétés élémentaires de la courbe \mathcal{C} , dont les preuves peuvent être trouvées dans [Mar13] ou [GM1] :

Proposition 8.6.

- i) La courbe \mathcal{C} est sans points rationnels, i.e., $\forall \alpha = (r, s) \in \mathbb{Q}^2$, $P(\alpha) \neq 0$.
- ii) A est un anneau principal (en particulier factoriel).
- iii) Les éléments inversibles de A sont les éléments de \mathbb{Q}^* .
- iv) Tout élément irréductible $\pi \in A^*$ change de signe en chacune de ses racines (zéros) sur \mathcal{C} , ce qui signifie qu'en chaque point de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_\pi$ (où $\mathcal{C}_\pi := (\pi = 0)$, cette intersection est transversale. En particulier, le nombre de changements de signes d'un élément irréductible (donc d'un élément quelconque) de A sur \mathcal{C} est pair.

REMARQUE 8.7.

Si π s'annule en un nombre fini (donc pair) non nul de points de \mathcal{C} , alors il engendre un **idéal réel** de A .

8.1.3 Description géométrique des éléments de X

Comme l'est le cas pour le corps $\mathbb{R}(x)$, les ordres de K ont une description géométrique très simple et intuitive. Le lemme suivant constitue un premier indice pour la compréhension de ces ordres :

Lemme 8.8. Soit $\alpha = (r, s) \in \mathcal{C}$. Alors on a équivalence entre :

- i) r est algébrique sur \mathbb{Q} .
- ii) s est algébrique sur \mathbb{Q} .

Définition 8.9. Un zéro réel de P sur \mathcal{C} , à coordonnées algébriques, est appelé **point algébrique**, autrement, il est dit **point transcendant**.

Proposition 8.10.

- i) Tout point algébrique $\alpha = (r, s)$ sur \mathcal{C} donne lieu à deux ordres associés aux demi-branches de \mathcal{C} centrées en α . En respectant l'orientation choisie sur \mathcal{C} , on note ces ordres par σ_α^- et σ_α^+ , respectivement. Les ordres ainsi construits sont tous les ordres non archimédiens de K .
- ii) Chaque point transcendant réel $\alpha = (r, s)$ donne lieu à un unique ordre archimédien de K . On le note par σ_α^0 . Ces ordres sont aussi tous les ordres archimédiens de K .

REMARQUE 8.11.

Cas où α est algébrique : Un élément de K est dans σ_α^- (resp. dans σ_α^+), s'il est positif en les points à gauche (resp. à droite), suivant l'orientation choisie sur le cercle \mathcal{C} , et très proches de α , i.e., positif sur une demi-branche gauche (resp. droite) de \mathcal{C} centrée en α .

Cas où α est transcendant : Un élément de K est dans σ_α^0 , s'il est positif en α .

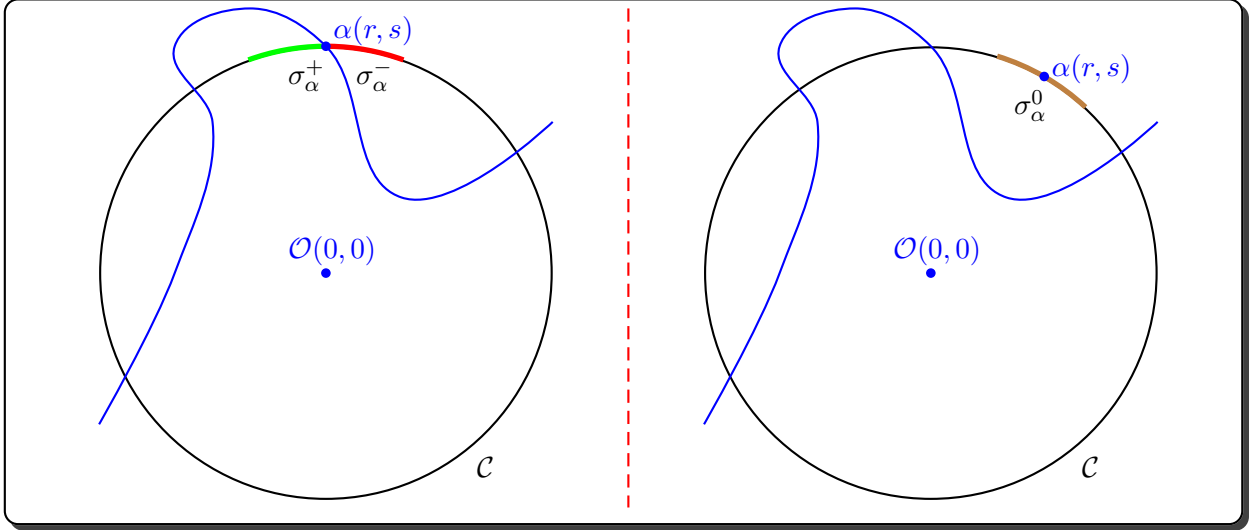


FIGURE 3 – Illustration des ordres algébriques (figure de gauche) et transcendants (figure de droite) de K .

8.1.4 Représentation par les 2-formes

Proposition 8.12. Soient $\pi \in A$ un élément irréductible réel et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est pair) ses racines sur \mathcal{C} . Alors :

- i) Les points α_i sont algébriques (voir lemme (8.8)).
- ii) Les ordres compatibles avec la valuation π -adique ν_π (voir définition (3.46)) sont ceux associés aux demi-branches centrées en les points α_i ($i \in \{1, \dots, n\}$).
- iii) Ces ordres sont exactement les éléments de l'ensemble :

$$X_\pi := \{\sigma_{\alpha_1}^-, \sigma_{\alpha_1}^+, \dots, \sigma_{\alpha_n}^-, \sigma_{\alpha_n}^+\},$$

qui est une composante connexe de X au sens de [Mar1].

Le couple $(X_\pi, G_\pi) := (X_\pi, G|_{X_\pi})$ est un sous-espace d'ordres de (X, G) , isomorphe à une extension de $(X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})$, où $k(\pi)$ est le corps résiduel associé à la valuation ν_π sur K (voir paragraphe #3.6).

- iv) Réciproquement, tout composante connexe non triviale est de cette forme.

NOTATION 8.13.

Fixons-nous un élément $a \in K$ et un sous-ensemble non vide $S \subset K$.

On définit les ensembles a^\star et S^\star , où $\star \in \{<, \leq, =, >, \geq\}$, comme suit :

1. $a^\star = \{\alpha \in \mathcal{C} ; a(\alpha) \star 0\}$.
2. $S^\star = \{\alpha \in \mathcal{C} ; \forall b \in S, b(\alpha) \star 0\}$.

Théorème 8.14 (REPRÉSENTATION DANS (X, G) (1)). *On considère un préordre (propre) T sur K , engendré par un nombre fini d'éléments, et on note par $T_A = T \cap A$, sa trace sur A . On note également par G_T le quotient K^*/T^* , muni de sa structure naturelle de groupe spécial réduit et par (X_T, G_T) le sous-espace d'ordres de (X, G) composé des ordres de K contenant T (voir (2.31)). Pour tous éléments a et b de K^* , a_T et b_T désignent leurs classes²⁹ respectives dans G_T . On a équivalence entre :*

- i) $a_T \in D_T(1, b_T)$ ³⁰.
- ii) $\forall r \in T^> ; r \in a^{\geq}$ ou $r \in (ab)^{\geq}$.
- iii) $\forall r \in T_A^> ; r \in a^{\geq}$ ou $r \in (ab)^{\geq}$.

DÉMONSTRATION. (Voir [GM1] - Lemme 4 (1.)).

Théorème 8.15 (REPRÉSENTATION DANS (X, G) (2)). *Soit π un élément irréductible réel non nul de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines réelles sur \mathcal{C} . Notons par $db_{\alpha_i}^-$ et $db_{\alpha_i}^+$ les deux demi-branches supportées sur \mathcal{C} centrées en α_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et par (X_π, G_π) le sous-espace de (X, G) composé des ordres associés à toutes ces demi-branches (voir proposition (8.12)). Soient $a, b \in K^*$. Notons par a_π et b_π leurs représentants³¹ dans G_π . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $a_\pi \in D_\pi(1, b_\pi)$ ³².
- ii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall * \in \{-, +\} ; a|_{db_{\alpha_i}^*} \geq 0$ ou $(ab)|_{db_{\alpha_i}^*} \geq 0$.
où $a|_{db_{\alpha_i}^*}$ et $b|_{db_{\alpha_i}^*}$ sont les restrictions de a et b (comme fonctions polynomiales) aux demi-branches $db_{\alpha_i}^*$ ³³.

DÉMONSTRATION. (Voir [GM1] - Lemme 4 (2.)).

On clôt le présent paragraphe par le résultat clé suivant, qui réduit la question de la vérification locale d'une formule pp à sa vérification sur un nombre fini de sous-espaces finis de (X, G) .

NOTATIONS 8.16.

Soit $\Phi(\underline{a})$ une formule pp qui s'exprime dans le langage élémentaire des groupes spéciaux comme suit :

$$\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a}) := \exists \underline{t} \bigwedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i(\underline{t}, \underline{a}),$$

où $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ est l'uplet des variables quantifiées, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ celui des variables libres (paramètres) et les $\varphi_i(\underline{t}, \underline{a})$ sont ses atomes ($\forall i \in \{1, \dots, r\}$).

Pour un choix de représentants, sans sommes de carrés, des paramètres a_k ($k \in \{1, \dots, m\}$) dans A^* , disons A_k , on définit Σ comme étant l'ensemble des facteurs irréductibles (réels) des A_k dans A^* , i.e. :

$$\Sigma := \{\pi \in A^* \text{ avec } \pi \text{ irréductible et } \exists k \in \{1, \dots, m\} ; \pi | A_k\}^{34}.$$

29. Sauf risque de confusion, on préférera les notations a et b aux notations avec les indices a_T et b_T .

30. La notation $a_T \in D_T(1, b_T)$ signifie que la représentation de a par la forme $\langle 1, b \rangle$ a lieu dans le sous-espace (X_T, G_T) .

31. Si le contexte est clair, on pourra omettre pour toute la suite les indices π et garder les notations a et b .

32. La notation $a_\pi \in D_\pi(1, b_\pi)$ signifie que la représentation de a par la forme $\langle 1, b \rangle$ a lieu dans le sous-espace (X_π, G_π) .

33. Voir section §5 pour plus de détails sur la notion de *demi-branche*.

34. $\pi | A_k$ signifie π *divise* A_k .

Théorème 8.17. *Tenant compte des notations et conditions posées plus haut, on a équivalence entre :*

- i) $(Y, H) \models \Phi(\underline{A})$, pour tout sous-espace d'ordres propre (Y, H) de (X, G) .
- ii) $(Y, H) \models \Phi(\underline{A})$, pour tout sous-espace d'ordres fini (Y, H) de (X, G) .
- iii) $(X_\pi, G_\pi) \models \Phi(\underline{A})$ pour tout sous-espace d'ordres (X_π, G_π) de (X, G) , et pour tout élément $\pi \in \Sigma$.

DÉMONSTRATION. (Voir [GM1] - Théorème 5).

8.2 Contre-exemples à la conjecture *pp*

8.2.1 Construction des paramètres

Pour les notations de la définition qui suit, voir (8.4), plus haut.

Définition 8.18. On appelle **forme affine**, la classe d'équivalence d'un polynôme de degré 1, disons $a \cdot x + b \cdot \sqrt{3 - x^2} + c \in A^* := \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + y^2 - 3)^*$, modulo les sommes de carrés de $K^* := \mathbb{Q}(x, \sqrt{3 - x^2})^*$, i.e., son image dans $G := G_K$.

REMARQUE 8.19.

Lorsqu'on parlera de formes affines, et si le contexte est clair, on ne distinguera pas entre appartenance à K^ , à G ou à un quotient G/Δ de G par un sous-groupe saturé.*

Comme on l'a signalé plus haut, les contre-exemples exposés dans [Mar11] et [GM1] utilisent une formule produit de rang 3, i.e., une formule du type $d \in D(1, a_1) \cdot D(1, a_2) \cdot D(1, a_3)$, où des représentants des a_i et de d sont choisis comme suit :

- i) $A_1 = \pi_1 \cdot \pi_2$, $A_2 = \pi_2 \cdot \pi_3$, $A_3 = \pi_1 \cdot \pi_3$ et $d = -\pi_2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3$. On remarque que $A_3 = A_1 \cdot A_2$ (égalité dans G).
- ii) Les $\pi_i = p_i \cdot x + q_i \cdot y + r_i$ et $\tau_i = u_i \cdot x + v_i \cdot y + w_i$ (où $y = \sqrt{3 - x^2}$) sont des formes affines sur \mathcal{C} .
- iii) Le choix des coefficients p_i, q_i, r_i, u_i, v_i et w_i repose sur une configuration géométrique très particulière des droites définies par ces formes affines.

Nous allons, dans ce qui suivra, généraliser cette construction pour aboutir à des formules produits de rang $n \geq 4$, quelconque, réfutant la conjecture *pp* dans le cas de l'espace d'ordres (X, G) du corps K .

On considère un entier naturel $n \geq 4$, fixé pour toute la suite de cette section.

Lemme 8.20. *Soient \widehat{T} et \widehat{J} deux arcs ouverts disjoints et non vides de \mathcal{C} . Alors il existe une forme affine dans A , disons π , s'annulant en un point $\alpha \in \widehat{T}$ et un point $\beta \in \widehat{J}$. De plus, $(\pi = 0) \cap \mathcal{C} = \{\alpha, \beta\}$ et cette intersection est transversale en chacun de ces deux points.*

DÉMONSTRATION. Notons par $C(\widehat{T}, \widehat{J}) \subset \mathbb{R}^2$ le cône généralisé (voir section §9 pour plus de détails) engendré par \widehat{T} et \widehat{J} , et par $\tilde{C}(\widehat{T}, \widehat{J})$ l'enveloppe convexe de $\widehat{T} \cup \widehat{J}$. Il n'est pas difficile de vérifier que $C(\widehat{T}, \widehat{J}) \setminus \text{adh}(\tilde{C}(\widehat{T}, \widehat{J}))$ est composé de deux composantes connexes ouvertes dans \mathbb{R}^2 , disons C_1 et C_2 . Par densité de \mathbb{Q}^2 dans \mathbb{R}^2 (pour la topologie euclidienne), il suffit de choisir deux points $\alpha' \in C_1 \cap \mathbb{Q}^2$ et $\beta' \in C_2 \cap \mathbb{Q}^2$, et définir π' comme étant le polynôme de degré 1 de $\mathbb{Q}[x, y]$ s'annulant en α' et β' . Il ne reste qu'à prendre la classe de π' dans A , qu'on note π , et prendre pour α et β les zéros respectifs de π sur \widehat{T} et \widehat{J} .

Proposition 8.21. *Il existe deux familles de formes affines sur \mathcal{C} , disons π_1, \dots, π_n et τ_1, \dots, τ_n , vérifiant les conditions suivantes :*

- i) Chacune de ces formes affines s'écrit $a \cdot x + b \cdot y + c$, avec $y = \sqrt{3 - x^2}$ et a, b et c sont des éléments de \mathbb{Q} .*
- ii) Les droites $(\pi_i = 0)$ et $(\tau_i = 0)$ intersectent \mathcal{C} transversalement, chacune en deux points, $(\pi_i = 0) \cap \mathcal{C} = \{p_{1,i}, p_{2,i}\}$ et $(\tau_i = 0) \cap \mathcal{C} = \{q_{1,i}, q_{2,i}\}$.
Ces points sont rangés sur \mathcal{C} suivant l'orientation choisie (trigonométrique) de manière à avoir le cycle suivant :*

$$\begin{aligned} & p_{1,1} \curvearrowright q_{2,n} \curvearrowright q_{1,1} \curvearrowright p_{2,1} \curvearrowright \\ & \dots \curvearrowright p_{1,i} \curvearrowright q_{2,i-1} \curvearrowright q_{1,i} \curvearrowright p_{2,i} \curvearrowright \dots \quad [35]. \\ & \curvearrowright p_{1,n} \curvearrowright q_{2,n-1} \curvearrowright q_{1,n} \curvearrowright p_{2,n} \curvearrowright p_{1,1} \end{aligned}$$

- iii) Les formes affines π_i et τ_i (pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$) sont toutes positives (en tant qu'éléments de $\mathbb{Q}[x, y]$) à l'origine du plan $\mathcal{O}(0, 0)$.*
- iv) Les droites $(\pi_i = 0)$ délimitent un polygone \mathcal{P}_n à n côtés qu'on note, respectivement, c_{π_i} et qu'on range selon le cycle suivant :*

$$c_{\pi_1} \curvearrowright c_{\pi_2} \curvearrowright \dots \curvearrowright c_{\pi_n} \curvearrowright c_{\pi_1} \quad [36],$$

dont les sommets sont situés à l'extérieur du disque formé par \mathcal{C} (les indices utilisés parcourent l'ensemble $\mathbb{Z}_n := \{1, \dots, n-1, n=0\}$ (groupe cyclique à n éléments)).

- v) Les droites $(\tau_i = 0)$ délimitent un polygone \mathcal{Q}_n à n côtés qu'on note respectivement c_{τ_i} que l'on peut ranger selon le cycle suivant :*

$$c_{\tau_1} \curvearrowright c_{\tau_2} \curvearrowright \dots \curvearrowright c_{\tau_n} \curvearrowright c_{\tau_1} \quad [37],$$

dont les sommets sont situés à l'extérieur du disque formé par \mathcal{C} (les indices utilisés parcourent également l'ensemble \mathbb{Z}_n).

- vi) Les polygones \mathcal{P}_n et \mathcal{Q}_n se coupent en exactement $2n$ points, situés à l'intérieur du disque formé par \mathcal{C} .*

DÉMONSTRATION. Application du lemme (8.20), en plaçant $4n$ arcs ouverts disjoints sur \mathcal{C} sur lesquels on veut avoir les points $p_{1,i}$, $p_{2,i}$, $q_{1,i}$ et $q_{2,i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ (voir figure (4)).

8.2.2 Notation des arcs

Notons, pour toute valeur de l'indice $i \in \mathbb{Z}_n$, par $\widehat{I_i}$ (resp. $\text{adh}(\widehat{I_i})$) le petit arc ouvert (resp. fermé) ayant pour extrémités les points $p_{1,i}$ et $p_{2,i}$, c'est-à-dire le petit arc délimité par l'angle direct $\widehat{p_{1,i}Op_{2,i}}$. Les extrémités $p_{1,i}$ et $p_{2,i}$ ne sont pas comprises (resp. sont comprises).

De la même façon, notons par $\widehat{J_i}$ (resp. $\text{adh}(\widehat{J_i})$) le petit arc ouvert (resp. fermé) ayant pour extrémités les points $q_{1,i}$ et $q_{2,i}$, c'est-à-dire le petit arc délimité par l'angle direct $\widehat{q_{1,i}Oq_{2,i}}$. Les extrémités $q_{1,i}$ et $q_{2,i}$ ne sont pas comprises (resp. sont comprises).

Notons par \mathcal{I} (resp. \mathcal{I}^{adh}) l'ensemble des arcs ouverts $\widehat{I_i}$ (resp. des arcs fermés $\text{adh}(\widehat{I_i})$), et par \mathcal{J} (resp. \mathcal{J}^{adh}) l'ensemble des arcs ouverts $\widehat{J_i}$ (resp. des arcs fermés $\text{adh}(\widehat{J_i})$).

Notons enfin par $\overline{\widehat{I_i}}^c$ (resp. $\overline{\text{adh}(\widehat{I_i})}^c$, $\overline{\widehat{J_i}}^c$ et $\overline{\text{adh}(\widehat{J_i})}^c$) le complémentaire de l'arc $\widehat{I_i}$ (resp. $\text{adh}(\widehat{I_i})$, $\widehat{J_i}$ et $\text{adh}(\widehat{J_i})$) dans \mathcal{C} .

35. Le symbole " \curvearrowright " est utilisé ici pour désigner deux points consécutifs sur \mathcal{C} parmi les $p_{k,i}$ et $q_{k,i}$.

36. Le symbole " \curvearrowright " est utilisé ici pour désigner deux côtés consécutifs de \mathcal{P}_n .

37. Le symbole " \curvearrowright " est utilisé ici pour désigner deux côtés consécutifs de \mathcal{Q}_n .

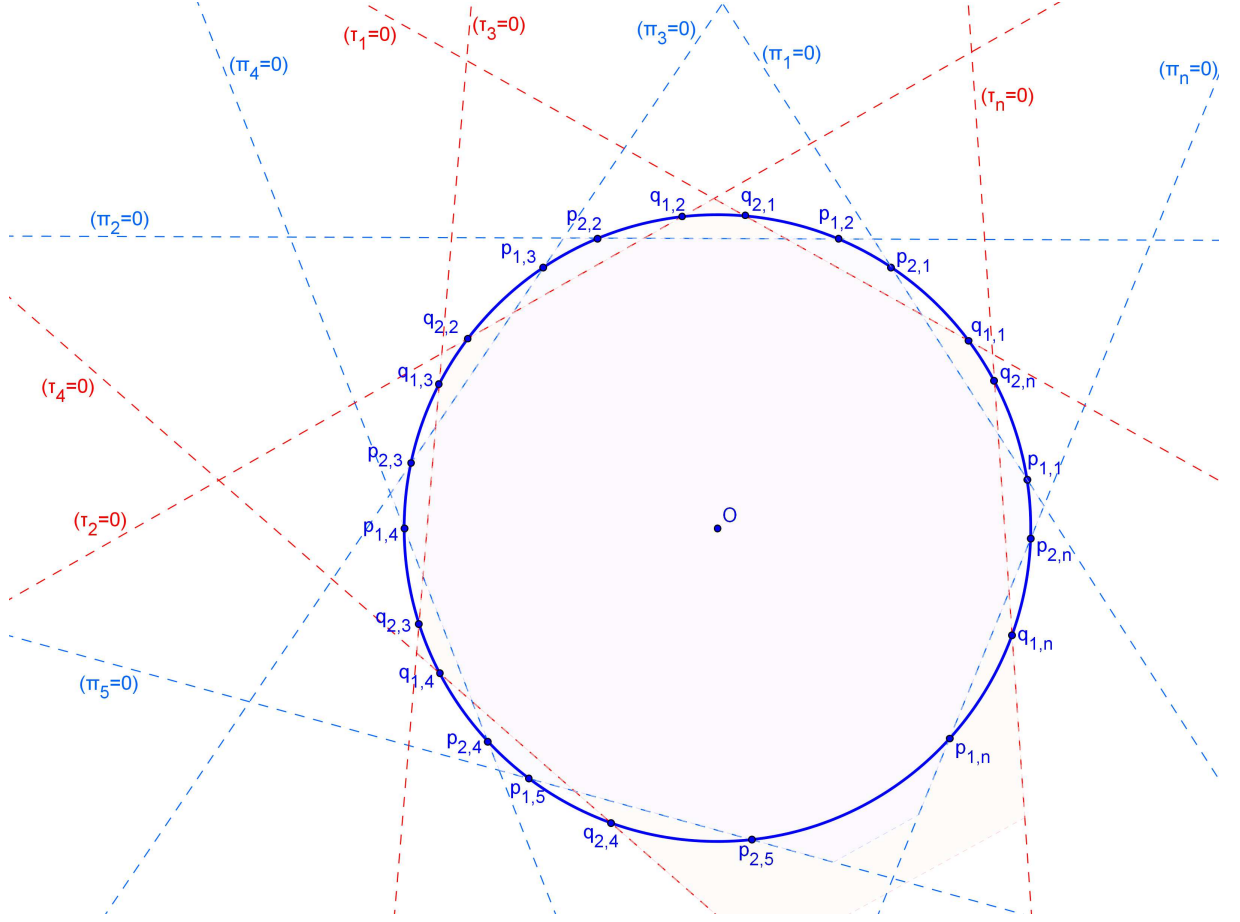


FIGURE 4 – Les droites bleues (resp. rouges) sont définies par les équations $\pi_i = 0$ (resp. $\tau_i = 0$). Le polygone \mathcal{P}_n (resp. \mathcal{Q}_n) colorié en bleu (resp. en rouge) est l'ensemble semi-algébrique des points du plan réel défini par l'inéquation $\prod_{i=1}^{i=n} \pi_i \geq 0$ (resp. $\prod_{i=1}^{i=n} \tau_i \geq 0$).

8.2.3 Théorème principal

NOTATION 8.22.

Pour toute valeur de $i \in \mathbb{Z}_n$, posons $A_i = \pi_i \cdot \pi_{i+1}$, où $\pi_{n+1} = \pi_1$. Sauf risque de confusion, on note également par A_i sa classe dans G ou dans un quotient par un sous-groupe saturé de G . De même, posons $d = -\pi_2 \cdot \pi_{n-1} \cdot \tau_1 \dots \tau_n$ et notons aussi par d sa classe dans G ou dans un quotient par un sous-groupe saturé de G .

Théorème 8.23 (CONTRE-EXEMPLES À LA CONJECTURE *pp*). On considère la formule :

$$\Phi(\underline{A}, d) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{A}, d) = \exists \underline{t} \left\{ \begin{array}{ll} t_1 & \in D(1, A_1) \\ \vdots & \vdots \\ t_{n-1} & \in D(1, A_{n-1}) \\ d \cdot t_1 \dots t_{n-1} & \in D(1, A_n), \end{array} \right.$$

où $\underline{t} := (t_1, \dots, t_{n-1})$ sont les variables quantifiées, et d, \underline{A} (où $\underline{A} := (A_1, \dots, A_n)$), sont les assignations des paramètres de $\Phi(\underline{a}, d)$, donnés plus haut (voir (8.2.1) et (8.22)). Alors :

- i) $(Y, H) \models \Phi(\underline{A}, d)$, pour tout sous-espace fini de (X, G) .
- ii) $(X, G) \not\models \Phi(\underline{A}, d)$.

Avant de passer à la démonstration du théorème (8.23), rappelons d'abord quelques propriétés géométriques des paramètres définis ci-dessus (voir notations (8.22)).

Lemme 8.24. *Si (t_1, \dots, t_{n-1}) est un témoin de vérité sur (X, G) de la formule $\Phi(\underline{A}, d)$, et T_i sont des représentants des t_i dans A^* (sans sommes de carrés dans K^*), alors :*

- i) *Pour tout arc connexe ouvert $\widehat{T} \subset \mathcal{C}$, et tenant compte du fait que $T_i \in D(1, A_i)$, on aura :*

$$A_i|_{\widehat{T}} \geq 0 \quad \text{ou} \quad A_i \cdot T_i|_{\widehat{T}} \geq 0; \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

En particulier, si $A_i|_{\widehat{T}} > 0$, alors $T_i|_{\widehat{T}} \geq 0$.

- ii) *T_i ne change de signe sur \widehat{T} que si A_i prend des valeurs négatives ou nulles sur ce dernier.*

DÉMONSTRATION. Le point (i) découle du théorème (8.14), et le point (ii) est immédiat (par contraposée), en appliquant le point (i).

Corollaire 8.25. $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, T_i ne change de signe qu'au plus sur les arcs $\widehat{adh}(\widehat{T}_i)$ et $\widehat{adh}(\widehat{T}_{i+1})$.

DÉMONSTRATION. Par définition, chacun des A_i ne peut être négatif ou nul que sur $\widehat{adh}(\widehat{T}_i)$ et $\widehat{adh}(\widehat{T}_{i+1})$. En effet, d'après la distribution de signes exhibée dans le tableau (1), sur chaque colonne correspondant aux signes de A_i , on voit bien que A_i n'est négatif (ou nul) que sur l'adhérence de la réunion des arcs, $(p_{1,i}, q_{2,i-1})$, $(q_{2,i-1}, q_{1,i})$ et $(q_{1,i}, p_{2,i})$, c'est-à-dire l'arc $\widehat{adh}(\widehat{T}_i) := \widehat{adh}((p_{1,i}, p_{2,i}))$, ainsi que sur l'adhérence de la réunion des arcs, $(p_{1,i+1}, q_{2,i})$, $(q_{2,i}, q_{1,i+1})$ et $(q_{1,i+1}, p_{2,i+1})$, c'est-à-dire l'arc $\widehat{adh}(\widehat{T}_{i+1}) := \widehat{adh}((p_{1,i+1}, p_{2,i+1}))$, pour tout $i \in \mathbb{Z}_n$. En appliquant le point (i) du lemme (8.24), le corollaire (8.25) suit naturellement.

Corollaire 8.26.

- i) *Deux représentants T_i et T_j des témoins t_i et t_j (avec $i \neq j$) de \underline{t} ne peuvent changer de signe, simultanément, que si les indices i et j sont consécutifs dans $\{1, \dots, n-1, n=0\}$.*
- ii) *Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Les seuls changements de signes simultanés de T_i et de T_{i+1} ne peuvent survenir que sur l'arc fermé $\widehat{adh}(\widehat{T}_{i+1})$.*
- iii) *Les coordonnées T_{n-1} et T_1 ne changent pas de signe simultanément sur \mathcal{C} .*

DÉMONSTRATION. Les points (i) et (ii) découlent du corollaire (8.25). Le point (iii) découlent également du même corollaire, en remarquant que les arcs sur lesquels T_{n-1} change de signe sont $\widehat{adh}(\widehat{T}_{n-1})$ et $\widehat{adh}(\widehat{T}_n)$ et ceux sur lesquels T_1 peut changer de signe sont $\widehat{adh}(\widehat{T}_1)$ et $\widehat{adh}(\widehat{T}_2)$, et on voit clairement que la réunion des deux premiers est disjointe de celle des deuxièmes.

Pour montrer le premier point du théorème (8.23), nous procéderons au cas par cas, et pour le second, nous prouverons que si (T_1, \dots, T_{n-1}) sont des représentants des témoins de vérité de $\Phi(\underline{A}, d)$ sur (X, G) , alors le calcul du nombre de changements de signe simultanés sur \mathcal{C} de deux coordonnées quelconques T_i et T_{i+1} conduirait à une contradiction sur la parité de ce nombre.

Les bons candidats pour ces calculs sont donc :

Couple de coordonnées	(T_1, T_2)	(T_2, T_3)	\dots	(T_{n-2}, T_{n-1})
Arc des changements de signe simultanés	$\widehat{adh}(\widehat{T}_2)$	$\widehat{adh}(\widehat{T}_3)$	\dots	$\widehat{adh}(\widehat{T}_{n-1})$

8.2.4 Un mot sur la définition de $d := -\pi_2 \dots \pi_{n-1} \cdot \tau_1 \dots \tau_n$

Le paramètre d , qui n'apparaît que dans l'atome $d \cdot t_1 \dots t_{n-1} \in D(1, A_n)$, est construit de façon à contrôler les changements de signes (simultanés, ou pas) de deux témoins consécutifs T_i, T_{i+1} . Par ailleurs, $d \cdot t_1 \dots t_{n-1} \in D(1, A_n)$ peut se traduire par :

$$\forall \sigma \in X, \sigma(A_n) = 1 \implies \sigma(d \cdot t_1 \dots t_{n-1}) = 1,$$

ce qui est équivalent par le théorème (8.14) à :

$$\forall \alpha \in \mathcal{C} ; (d \cdot T_1 \dots T_{n-1})(\alpha) \geq 0 \quad \text{ou} \quad (A_n \cdot d \cdot T_1 \dots T_{n-1})(\alpha) \geq 0,$$

et dans le cas où $A_n(\alpha) > 0$, alors on aura, $(d \cdot T_1 \dots T_{n-1})(\alpha) \geq 0$ (voir lemme (8.24)), ce qui signifie que d change de signe, *si, et seulement si*, le produit $T_1 \dots T_{n-1}$ change de signe en tous les points où a_n est strictement positif. Par ailleurs, par définition, $A_n = \pi_1 \cdot \pi_n$ est

strictement positif sur $\widehat{(p_{2,1}, p_{1,n})}$, alors d change de signe en un point de cet arc, si, *et seulement si*, $T_1 \dots T_{n-1}$ change de signe en ce même point.

Les paramètres A_i et d sont construits de façon à ce que la formule $\Phi(\underline{A}, d)$ soit vérifiée partout localement *i.e.*, sur tous les sous espaces finis de (X, G) , mais pas globalement, *i.e.*, n'est pas vérifiée sur (X, G) .

8.3 Preuve du théorème principal

8.3.1 Vérification locale de Φ

D'après le théorème (8.17), on peut restreindre notre étude aux sous-espaces X_π où $\pi \in \Sigma$. On distinguera donc les cas suivants :

1. Vérification sur X_{τ_n} .
2. Vérification sur X_{π_1} et X_{π_n} .
3. Vérification sur X_{τ_1} et $X_{\tau_{n-1}}$.
4. Vérification sur les autres sous-espaces X_{π_i} ($i \neq 1, n$) et X_{τ_j} ($j \neq 1, n-1, n$).

Noter que chacun de ces ensembles est un éventail de 4 éléments de (X, G) .

Vérification sur X_{τ_n} : Sur ce sous-espace, par les propositions (8.12) et (8.21), on a :

$$X_{\tau_n} = \{\sigma_{q_{1,n}}^-, \sigma_{q_{1,n}}^+, \sigma_{q_{2,n}}^-, \sigma_{q_{2,n}}^+\}.$$

Comme $\pi_1(q_{1,n}) > 0$, $\pi_1(q_{2,n}) < 0$, $\pi_2(q_{1,n}) > 0$ et $\pi_2(q_{2,n}) > 0$, alors $A_1(q_{1,n}) > 0$ et $A_1(q_{2,n}) < 0$ (voir figure (4)).

Le même argument montre que :

$$\pi_{n-1}(q_{1,n}) > 0 ; \pi_{n-1}(q_{2,n}) > 0 ; \pi_n(q_{1,n}) < 0 \text{ et } \pi_n(q_{2,n}) > 0.$$

Ce qui donne $A_{n-1}(q_{1,n}) < 0$ et $A_{n-1}(q_{2,n}) > 0$.

On observe que :

- i) $A_1, A_{n-1} \notin \{-1, 1\}$ dans G_{τ_n} , car ils prennent des valeurs négatives et positives sur les différents éléments de X_{τ_n} .
- ii) Pour tout $\sigma \in \{\sigma_{q_{1,n}}^-, \sigma_{q_{1,n}}^+, \sigma_{q_{2,n}}^-, \sigma_{q_{2,n}}^+\}$, on a ; $\sigma(\pi_1) = -\sigma(\pi_n)$, donc $A_n = -1$, ce qui implique que $d \dots T_1 \dots T_{n-1} \in D_{X_{\tau_n}}(1, A_n)$.

l'arc ▼	$sg(A_1)$	$sg(A_2)$...	$sg(A_i)$	$sg(A_{i+1})$...	$sg(A_{n-1})$	$sg(A_n)$	$sg(d)$
$(p_{2,n}; p_{1,1})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,1}; q_{2,n})$	-	+	...	+	+	...	+	-	+
$(q_{2,n}; q_{1,1})$	-	+	...	+	+	...	+	-	-
$(q_{1,1}; p_{2,1})$	-	+	...	+	+	...	+	-	+
$(p_{2,1}; p_{1,2})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,2}; q_{2,1})$	-	-	...	+	+	...	+	+	-
$(q_{2,1}; q_{1,2})$	-	-	...	+	+	...	+	+	+
$(q_{1,2}; p_{2,2})$	-	-	...	+	+	...	+	+	-
$(p_{2,2}; p_{1,3})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,3}; q_{2,2})$	+	-	...	+	+	...	+	+	+
$(q_{2,2}; q_{1,3})$	+	-	...	+	+	...	+	+	-
$(q_{1,3}; p_{2,3})$	+	-	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{2,3}; p_{1,4})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$(p_{2,i-1}; p_{1,i})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,i}; q_{2,i-1})$	+	+	...	-	+	...	+	+	+
$(q_{2,i-1}; q_{1,i})$	+	+	...	-	+	...	+	+	-
$(q_{1,i}; p_{2,i})$	+	+	...	-	+	...	+	+	+
$(p_{2,i}; p_{1,i+1})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,i+1}; q_{2,i})$	+	+	...	-	-	...	+	+	+
$(q_{2,i}; q_{1,i+1})$	+	+	...	-	-	...	+	+	-
$(q_{1,i+1}; p_{2,i+1})$	+	+	...	-	-	...	+	+	+
$(p_{2,i+1}; p_{1,i+2})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
$(p_{2,n-2}; p_{1,n-1})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,n-1}; q_{2,n-2})$	+	+	...	+	+	...	-	+	-
$(q_{2,n-2}; q_{1,n-1})$	+	+	...	+	+	...	-	+	+
$(q_{1,n-1}; p_{2,n-1})$	+	+	...	+	+	...	-	+	-
$(p_{2,n-1}; p_{1,n})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+
$(p_{1,n}; q_{2,n-1})$	+	+	...	+	+	...	-	-	+
$(q_{2,n-1}; q_{1,n})$	+	+	...	+	+	...	-	-	-
$(q_{1,n}; p_{2,n})$	+	+	...	+	+	...	-	-	+
$(p_{2,n}; p_{1,1})$	+	+	...	+	+	...	+	+	+

TABLE 1 – Matrice de distribution des signes ($sg(A_i)$ et $sg(d)$) des paramètres A_i et d sur les différents arcs consécutifs délimités par les points $p_{1,i}$, $p_{2,i}$, $q_{1,i}$ et $q_{2,i}$

- iii) Pour tout $i \in \{2, \dots, n-2\}$ et $q \in \{q_{1,n}, q_{2,n}\}$, on a $\pi_i(q) > 0$ et $\pi_{i+1}(q) > 0$ (voir figure (4)). Puisque, $A_i = \pi_i \cdot \pi_{i+1}$, ceci donne $A_i = 1$ pour tout $i \in \{2, \dots, n-2\}$, et puisque $T_i \in D_{X_{\tau_n}}(1, A_i)$, il s'en suit que $T_i = 1$.
- iv) $D_{X_{\tau_n}}(1, A_1) = \{1, A_1\}$.
 Soit $b \in G$, tel que $b \in D_{X_{\tau_n}}(1, A_1)$, et $B \in A^*$, sans somme de carrés dans K^* , un représentant de b . Alors pour tout $\sigma \in X_{\tau_n}$, $\sigma(A_1) = 1 \implies \sigma(b) = 1$, i.e., $\forall q \in \{q_{1,n}, q_{2,n}\}$, on a $B(q) \geq 0$ ou $(A_1 \dot{B})(q) \geq 0$, et comme $A_1(q_{1,n}) > 0$, donc $B(q_{1,n}) > 0$, car si B s'annule en $q_{1,n}$, alors il changera de signe, car il est supposé sans sommes de carrés comme facteurs, ce qui contredirait le fait qu'il possède le même signe sur les demi-branches $db_{q_{1,n}}^-$ et $db_{q_{1,n}}^+$, car $(A_1 \cdot B)(q_{1,n}) > 0$. Par le fait que τ_n est le seul élément irréductible de A qui s'annule en $q_{1,n}$ et par conséquent en $q_{2,n}$, alors B possède aussi le même signe sur les deux demi-branches $db_{q_{2,n}}^-$ et $db_{q_{2,n}}^+$. Donc si $b(\sigma_{q_{2,n}}^-) = b(\sigma_{q_{2,n}}^+) = -1$, alors $b = A_1$ (dans G), et si $b(\sigma_{q_{2,n}}^-) = b(\sigma_{q_{2,n}}^+) = +1$, alors $b = +1$ (dans G).

Cette preuve pourra se résumer comme suit :

D'une part ; $A_n = \pi_1 \cdot \pi_n = -1$, donc $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} \in D(1, A_n)$.

Par ailleurs ; $\forall i \in \{2, \dots, n-2\}$; $A_i = 1$, donc $T_i = 1$.

De plus, on a $A_1, A_{n-1} \notin \{-1, 1\}$, donc :

$$D(1, A_1) = \{1, A_1\} \text{ et } D(1, A_{n-1}) = \{1, A_{n-1}\}.$$

On a ainsi 4 solutions pour $\Phi(\underline{A}, d)$ sur X_{τ_n} , qui sont données par :

$$T_2 = \dots = T_{n-2} = 1, T_1 \in \{1, A_1\} \text{ et } T_{n-1} \in \{1, A_{n-1}\}.$$

Pour les autres cas, on pourra raisonner de la même façon, en utilisant le fait que les points $q_{1,i}$ et $q_{2,i}$ sont les seules racines de τ_i et que $p_{1,i}$ et $p_{2,i}$ sont également les seules racines de π_i . Voici le résumé des solutions de $\Phi(\underline{A}, d)$ dans chacun de ces cas de figure :

Vérification sur X_{π_1} : Sur ce sous-espace :

On a d'une part ; $\forall i \in \{2, \dots, n-1\}$, $A_i = 1$, ce qui donne $T_i = 1$.

Et par ailleurs ; $d = 1$, donc $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} = T_1$.

Enfin, $A_1 = A_n \notin \{-1, 1\}$, ce qui donne $D(1, A_1) = \{1, A_1\}$.

On a donc 2 solutions pour $\Phi(\underline{A}, d)$:

$$T_2 = \dots = T_{n-1} = 1 \text{ et } T_1 \in \{1, A_1\}.$$

Vérification sur X_{π_n} : Dans ce cas :

La situation est géométriquement symétrique au cas de l'espace X_{π_1} .

On a donc, d'une part ; $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$; $A_i = 1$, ce qui donne $T_i = 1$.

Et d'autre part ; $d = 1$, donc $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} = T_{n-1}$.

Et enfin, $A_{n-1} = A_n \notin \{-1, 1\}$, ce qui donne $D(1, A_{n-1}) = \{1, A_{n-1}\}$.

Là encore, il y a 2 solutions pour $\Phi(\underline{A}, d)$:

$$T_1 = \dots = T_{n-2} = 1 \text{ et } T_{n-1} \in \{1, A_{n-1}\}.$$

Vérification sur X_{τ_1} : Sur ce sous-espace, on a :

D'une part ; $\forall i \in \{3, \dots, n-1\}$; $A_i = 1$, donc $T_i = 1$, ce qui implique aussi que $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} = d \cdot T_1 \cdot T_2$.

Et par ailleurs, $A_1 = -1$, ce qui autorise toutes les valeurs de T_1 .

Enfin, $A_2, A_n \notin \{-1, 1\}$, donc :

$$D(1, A_2) = \{1, A_2\} \text{ et } D(1, A_n) = \{1, A_n\}.$$

De plus $A_2 \cdot A_n = -1$, ce qui offre ainsi 4 solutions pour $\Phi(\underline{A}, d)$ sur X_{τ_1} :

$$T_3 = \dots = T_{n-1} = 1 ; T_2 = 1 \text{ et } T_1 \in \{d, d \cdot A_n\}$$

ainsi que :

$$T_3 = \dots = T_{n-1} = 1 ; T_2 = A_2 \text{ et } T_1 \in \{d \cdot A_2, d \cdot A_2 \cdot A_n = -d\}.$$

Vérification sur $X_{\tau_{n-1}}$: Dans ce cas :

La situation est une encore *géométriquement symétrique* au cas de l'espace X_{τ_1} .

On a d'une part ; $\forall i \in \{1, \dots, n-3\}$; $A_i = 1$, donc $T_i = 1$, ce qui implique aussi que $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} = d \cdot T_{n-1} \cdot T_{n-2}$.

Et d'autre part ; $A_{n-1} = -1$, ce qui autorise toutes les valeurs de T_{n-1} .

Enfin, $A_{n-1}, A_{n-2} \notin \{-1, 1\}$, donc :

$$D(1, A_{n-1}) = \{1, A_{n-1}\} \text{ et } D(1, A_{n-2}) = \{1, A_{n-2}\}.$$

De plus $A_{n-1} \cdot A_{n-2} = -1$, ce qui offre encore 4 solutions pour $\Phi(\underline{A}, d)$ sur $X_{\tau_{n-1}}$, à savoir :

$$T_1 = \dots = T_{n-3} = 1 ; T_{n-2} = 1 \text{ et } T_{n-1} \in \{d, d \cdot A_n\},$$

ainsi que :

$$T_1 = \dots = T_{n-3} = 1 ; T_{n-2} = A_{n-2} \text{ et } T_{n-1} \in \{d \cdot A_{n-2}, d \cdot A_n \cdot A_{n-2}\}.$$

Vérification sur X_{π_i} avec $i \in \{2, \dots, n-1\}$: Dans ce cas :

On se fixe un élément $i \in \{2, \dots, n-1\}$. On a donc :

D'une part ; $\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1, i\}$, $A_j = 1$, donc $T_j = 1$, ce qui implique que $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} = d \cdot T_{i-1} \cdot T_i$.

D'autre part ; $A_1 = 1$ donc $d = T_{i-1} \cdot T_i$.

Enfin, $d = A_{i-1} = A_i \notin \{-1, 1\} \implies D(1, A_{i-1}) = D(1, A_i) = \{1, d\}$.

$\Phi(\underline{A}, d)$ a ainsi 2 solutions sur X_{π_i} :

$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1, i\}$, $T_j = 1$ et $((T_{i-1} = 1 \text{ et } T_i = d) \text{ ou } (T_{i-1} = d \text{ et } T_i = 1))$.

Vérification sur X_{τ_i} avec $i \in \{2, \dots, n-2\}$: Pour ce dernier cas :

Fixons-nous une valeur de $i \in \{2, \dots, n-2\}$.

On a d'une part ; $\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1, i, i+1\}$, on a $A_j = 1$ donc $T_j = 1$, ce qui implique, entre-autre, que $d \cdot T_1 \dots T_{n-1} = d \cdot T_{i-1} \cdot T_i \cdot T_{i+1}$.

De plus $A_i = -1$, ce qui autorise ainsi T_i à prendre toutes les valeurs possibles.

Et par ailleurs ; $A_n = 1$, ce qui implique que $T_i = d \cdot T_{i-1} \cdot T_{i+1}$.

Et comme $A_{n-1}, A_{i+1} \notin \{-1, 1\}$, alors :

$$D(1, A_{i-1}) = \{1, A_{i-1}\} \text{ et } D(1, A_{i+1}) = \{1, A_{i+1}\}$$

On a par conséquent 4 solutions pour $\Phi(\underline{A}, d)$ sur X_{τ_i} :

$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1, i, i+1\}$, $T_j = 1$ avec :

$$\begin{aligned} &[(T_{i-1} = 1 \quad \text{et} \quad T_i = d \quad \text{et} \quad T_{i+1} = 1) \quad \text{ou} \\ &(T_{i-1} = 1 \quad \text{et} \quad T_i = d \cdot A_{i+1} \quad \text{et} \quad T_{i+1} = A_{i+1}) \quad \text{ou} \\ &(T_{i-1} = A_{i-1} \quad \text{et} \quad T_i = d \cdot A_{i-1} \quad \text{et} \quad T_{i+1} = 1) \quad \text{ou} \\ &(T_{i-1} = A_{i-1} \quad \text{et} \quad T_i = A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot d \quad \text{et} \quad T_{i+1} = A_{i+1})] \end{aligned}$$

Ce qui finit ainsi la preuve du premier point du théorème (8.23).

8.3.2 Non vérification globale de Φ

Supposons par absurde, qu'il existe un $(n-1)$ -uplet (T_1, \dots, T_{n-1}) ayant ses coordonnées dans G , tel que $\varphi(\underline{T}, \underline{A}, d)$ soit vérifiée dans (X, G) .

On choisit, pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$, un représentant noté également T_i , de T_i dans A^* (sans sommes de carrés dans K^* comme facteurs).

Intéressons-nous aux changements de signe simultanés des coordonnées T_1 et T_2 sur \mathcal{C} . D'après le corollaire (8.26), T_1 et T_2 ne changent de signe, simultanément, que sur l'arc fermé

$$\text{adh}(\widehat{I_2}) := \text{adh}(\widehat{(p_{1,2}, p_{2,2})}).$$

Considérons ces changements, cas par cas, selon le plan suivant :

- i) en $p_{1,2}$ et $p_{2,2}$ (extrémités de $\widehat{\text{adh}(I_2)}$).
- ii) en $q_{2,1}$.
- iii) en $q_{1,2}$.
- iv) sur les arcs ouverts $\widehat{(p_{1,2}, q_{2,1})}$, $\widehat{(q_{2,1}, q_{1,2})}$ et $\widehat{(q_{1,2}, p_{2,2})}$.

Allons y !

Changement de signe en $p_{1,2}$ et $p_{2,2}$: En les ordres $\sigma_{p_{1,2}}^-$ et $\sigma_{p_{2,2}}^+$, T_1 et T_2 sont positifs et par continuité (des polynômes), ceci implique que le nombre total de changements de

signe de chacun des T_1 et T_2 est pair sur l'arc fermé $\widehat{\text{adh}((p_{1,2}, p_{2,2}))}$.

Par factorialité de A , le polynôme minimal de $p_{1,2}$, qui est égal au polynôme minimal de $p_{2,2}$, est π_2 , donc si l'un des témoins T_1 ou T_2 change de signe en $p_{1,2}$ alors il changera de signe en $p_{2,2}$ également.

Sur X_{π_2} , on a $A_i = 1$ pour tout $i \in \{3, \dots, n\}$ (voir la preuve de la vérification locale de Φ), donc $d = T_1 \cdot T_2$. Par ailleurs, comme d change de signe en les points $p_{1,2}$ et $p_{2,2}$ (voir le tableau (1)), donc un seul parmi T_1 et T_2 change de signe en ces deux points (en même temps).

Supposons que c'est T_1 qui change de signe en les points $p_{1,2}$ et $p_{2,2}$ (l'argument reste le même si c'était T_2 qui change de signe). Ceci implique que les changements de signe

simultanés de T_1 et T_2 ne surviennent que sur l'arc ouvert $\widehat{(p_{1,2}, p_{2,2})}$.

Changement de signe en $q_{2,1}$: En les ordres $\sigma_{q_{2,1}}^-$ et $\sigma_{q_{2,1}}^+$, on a $A_i = 1$ pour tout $i \in \{3, \dots, n\}$ (voir tableau (1)), donc une fois de plus, on a $d = T_1 \cdot T_2$. Et comme d change déjà de signe en le point $q_{2,1}$, alors un seul des témoins T_1 ou T_2 change de signe en $q_{2,1}$.

En $\sigma_{q_{1,1}}^-$ et $\sigma_{q_{1,1}}^+$, on a $A_2 = 1$, donc $T_2 = 1$. Par ailleurs le polynôme minimal de $q_{1,1}$, le même que celui de $q_{2,1}$, est τ_1 , donc c'est encore T_1 qui change de signe en $q_{2,1}$ (et en même temps en $q_{1,1}$), mais pas T_2 .

Changement de signe en $q_{1,2}$: De la même façon, en $q_{1,2}$ on a $d = T_1 \cdot T_2$. Le polynôme d change donc de signe en $q_{1,2}$, ce qui implique qu'un seul parmi les témoins T_1 ou T_2 change de signe en $q_{1,2}$. Par ailleurs, en les ordres $\sigma_{q_{2,2}}^-$ et $\sigma_{q_{2,2}}^+$, on a $A_1 = 1$, donc $T_1 = 1$, ceci oblige T_2 à changer de signe en $q_{2,2}$ (et en même temps en $q_{1,2}$), ce qui n'est pas le cas de T_1 .

On arrive ainsi à la conclusion suivante :

Conclusion 8.27. Les coordonnées des témoins, T_1 et T_2 , ne peuvent changer de signe simultanément que (au plus) sur les arcs ouverts $\widehat{(p_{1,2}, q_{2,1})}$, $\widehat{(q_{2,1}, q_{1,2})}$ et $\widehat{(q_{1,2}, p_{2,2})}$.

Changement de signe sur les arcs ouverts $\widehat{(p_{1,2}, q_{2,1})}$, $\widehat{(q_{2,1}, q_{1,2})}$ et $\widehat{(q_{1,2}, p_{2,2})}$: On a

vu que sur l'arc ouvert $\widehat{(p_{1,2}, p_{2,2})}$, $\forall i \in \{3, \dots, n\}$, on a $A_i = 1$, donc $d = T_1 \cdot T_2$. Et d'après la définition de d , ce dernier garde un signe constant sur chacun des arcs

ouverts $\widehat{(p_{1,2}, q_{2,1})}$, $\widehat{(q_{2,1}, q_{1,2})}$ et $\widehat{(q_{1,2}, p_{2,2})}$, ce qui force chaque changement de signe de T_1 (en un point de la réunion de ces arcs) à être accompagné d'un changement de signe de T_2 (en ce même point), et *vice versa*.

Ceci signifie que tous les changements de signe de T_1 et de T_2 sur cette réunion d'arcs sont simultanés.

Notons respectivement par c_1 , c_2 et c_3 le nombre de ces changements de signes sur

$\widehat{(p_{1,2}, q_{2,1})}$, $\widehat{(q_{2,1}, q_{1,2})}$ et $\widehat{(q_{1,2}, p_{2,2})}$, respectivement, et posons $c := c_1 + c_2 + c_3$.

Voici une conséquence de cette étude de cas :

Lemme 8.28. *Par ce qui précède, l'entier c est impair.*

DÉMONSTRATION. En effet, T_1 change de signe $c + 3$ fois sur l'arc fermé $\widehat{adh((p_{1,2}, p_{2,2}))}$ et T_2 change de signe $c + 1$ fois sur ce même arc, et comme le nombre total de changements de signe de chacun des T_1 et T_2 sur \mathcal{C} est pair (voir (8.6)), alors ceci implique que c est impair.

Le lemme suivant découle des propriétés générales des anneaux factoriels :

Lemme 8.29. *L'entier c est pair.*

DÉMONSTRATION. Par factorialité de l'anneau A (voir (8.6), point (ii)), chacun des T_1 et T_2 possède une décomposition en facteurs irréductibles comme suit :

$$T_1 = \alpha_1 \dots \alpha_r \cdot \beta_1 \dots \beta_s \quad \text{et} \quad T_2 = \alpha_1 \dots \alpha_r \cdot \gamma_1 \dots \gamma_t,$$

où les $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les seuls facteurs communs de T_1 et T_2 , donc $\beta_k \neq \gamma_l$ pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$ et pour tout $l \in \{1, \dots, t\}$.

Maintenant, par principalité de A (voir aussi (8.6), point (ii)), aucun des α_h (où $h \in \{1, \dots, r\}$), β_k (où $k \in \{1, \dots, s\}$) ni γ_l (où $l \in \{1, \dots, t\}$) n'a de racines communes, donc leurs racines sur \mathcal{C} sont toutes distinctes, et donc les changements de signes simultanés des témoins T_1 et T_2 surviennent exactement en les racines des polynômes α_h (quant h parcourt $\{1, \dots, r\}$). Par ailleurs, par la proposition (8.6), point (iv), chacun des α_h possède un nombre pair de racines et change de signe en chacune d'elles, et comme elles sont toutes distinctes (principalité de A toujours), alors le nombre total de racines communes à T_1 et T_2 sur \mathcal{C} est pair. On en déduit donc que le nombre c de changements de signe simultanés des coordonnées T_1 et T_2 sur \mathcal{C} est pair.

Corollaire 8.30. *Les lemmes (8.28) et (8.29) conduisent à une contradiction, ce qui prouve donc qu'un tel témoin (T_1, \dots, T_{n-1}) de $\Phi(\underline{A}, d)$ ne peut exister dans (X, G) . Ce qui finit ainsi la preuve du second point du théorème (8.23), et donc la preuve de ce théorème.*

Quatrième partie

Conjecture pp pour $\mathbb{R}(x, y)$

Sommaire

9	Cônes plans généralisés	82
9.1	Quelques éléments de Géométrie euclidienne	82
9.1.1	Vocabulaire	82
9.1.2	Cône plan centré en un point	82
9.2	Cône généralisé et cône exclusif	84
9.2.1	Définitions	84
9.2.2	Conditions suffisantes de fermeture des cônes généralisés	86
9.2.3	Caractérisation du cône généralisé	87
9.2.4	Conditions de globalité	88
9.2.5	Questions ouvertes : Cônes généralisés et cônes exclusifs	88
10	Sur certaines familles V-universelles	89
10.1	Familles et formules V -universelles	89
10.2	Notations et réduction du passage <i>local-global</i>	90
10.3	Théorème principal	92
10.4	Preuve du Théorème principal	93
10.4.1	Décomposition des témoins de vérité sur (Y, H)	94
10.4.2	Choix d'un point de contrôle	95
10.4.3	Ordre cyclique, arcs d'interception et composantes de \mathcal{C}	97
10.4.4	Points, droites et formes d'ajustement	99
10.4.5	Construction des témoins de vérité de $\Phi(\underline{\mathbf{A}})$ sur (X, G)	101
10.4.6	Validité de $\varphi(\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{A}})$ sur (X, G)	111
10.5	Construction de familles V -universelles	120
10.5.1	Méthode I	120
10.5.2	Méthode II	121

9 Cônes plans généralisés

Mots-clés : Eléments de Géométrie euclidienne, cônes classiques, cônes généralisés (par projection), conditions de fermeture, caractérisations.

Références : [Dab], [Pey].

Résumé

*Les ensembles coniques, souvent utilisées en Géométrie pour étudier les structures combinatoires des objets, sont au centre de cette section. Dans le cas du plan affine réel, la notion **classique** de cône ne fournit pas des propriétés très intéressantes, dans le sens où les cônes sont des ensembles délimités par deux droites. Notre but ici, est de donner une approche simple et intuitive pour généraliser cette notion de cône, et obtenir des objets beaucoup plus riches. Une application immédiate des **cônes généralisés** est la construction d'une famille de formules pp, dite V -universelles, vérifiant le principe local-global dans l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$ (voir section §10). Nous introduirons, pour ce faire, la notion de **cône exclusif**, que nous utiliserons dans le cadre particulier des **courbes algébriques lisses**.*

9.1 Quelques éléments de Géométrie euclidienne

9.1.1 Vocabulaire

En Géométrie euclidienne plane, un **cône** centré en un point p et dirigé par un ensemble connexe E est la réunion de toutes les droites (pq) , quand q parcourt E . En Géométrie euclidienne tridimensionnelle, un cône désigne simplement la réunion de toutes les droites passant par un point fixé p , appelé **sommet**, et un point parcourant une courbe plane (fermée ou pas), appelée **courbe directrice**, contenue dans un plan ne contenant pas le point p . Le nom de "cône" est également donné à un *solide* de sommet p et ayant comme base une surface compacte connexe plane supportée sur un plan ne contenant pas le point p .

Considérons, pour toute la suite, le plan affine réel \mathbb{R}^2 , muni de la topologie euclidienne et ayant comme anneau de fonctions régulières (resp. corps de fonctions) l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{R}[x, y]$ (resp. le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(x, y)$).

NOTATIONS 9.1.

Soient p et q deux points du plan réel.

1. (pq) , $[pq]$ désignent, respectivement, la droite passant par p et q et la demi-droite ayant comme origine p et dirigée vers q .
2. On note par $\mathcal{C}^1(p)$ le cercle unitaire (de rayon 1) centré en p .
3. On note, pour finir, par $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)}$ l'ensemble $\{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) ; p \notin E\}$, des parties de \mathbb{R}^2 ne contenant pas le point p .

9.1.2 Cône plan centré en un point

Définition 9.2 (CÔNES ET DEMI-CÔNES CENTRÉS EN UN POINT). Soient p et A , respectivement, un point et un sous-ensemble non vide du plan réel \mathbb{R}^2 , tels que $p \notin A$. On appelle :

1. **cône centré en p et dirigé par A** (resp. **demi-cône centré en p et dirigé par A**), et on note $C(p, A)$ (resp. $DC(p, A)$), la réunion de toutes les droites (pq) (resp. demi-droites $[pq]$), quand q parcourt A .
2. **espace des cônes** (resp. **des demi-cônes**) centrés en $p \in \mathbb{R}^2$, et on note $\mathcal{E}_C(p)$ (resp. $\mathcal{E}_{DC}(p)$), la collection de tous les cônes $C(p, A)$ (resp. demi-cônes $DC(p, A)$), quand A parcourt l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)}$.

REMARQUES 9.3.

Soient p un point et A un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 tels que $p \notin A$.

1. Si $\text{CoCo}(A) := \{C_i ; i \in I\}$ désigne la collection des composantes connexes de A , indexée par un ensemble I , alors :

$$C(p, A) = \bigcup_{i \in I} C(p, C_i) \text{ et } DC(p, A) = \bigcup_{i \in I} DC(p, C_i)$$

2. Les réunions :

$$C(p, A) \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in I} \left(C(p, C_i) \setminus \{p\} \right), \quad (7)$$

$$DC(p, A) \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in I} \left(DC(p, C_i) \setminus \{p\} \right), \quad (8)$$

ne sont pas toujours disjointes.

3. La disjonction de la réunion (7) entraîne celle de la réunion (8), mais la réciproque est fausse (penser au cas où A est la réunion de deux composantes connexes symétriques par rapport à p).

Dans le cas où $C(p, A) \setminus \{p\}$ est une réunion disjointe des $\left(C(p, C_i) \setminus \{p\} \right)$, on dit que les composantes connexes de A sont **bien dispersées** par rapport à p .

4. Pour un point fixé p , le cône et le demi-cône centrés en p , définis plus haut, peuvent être vus comme des applications d'évaluation :

$$\begin{aligned} DC(p, \cdot) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto DC(p, A) = \bigcup_{a \in A} [pa), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(p, \cdot) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\ A &\longmapsto C(p, A) = \bigcup_{a \in A} (pa). \end{aligned}$$

Attention ! Ces applications ne sont ni injectives ni surjectives.

5. L'image $\mathcal{E}_{DC}(p)$ de l'application $DC(p, \cdot)$ s'identifie, ensemblistement bien sûr, à l'ensemble des parties d'un cercle qui, à son tour, s'identifie à l'ensemble des parties de la droite projective réelle $\mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$.
6. La relation \sim_{DC} définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)}$ par $A \sim_{DC} B \Leftrightarrow DC(p, A) = DC(p, B)$ est une relation d'équivalence, ce qui induit l'identification suivante :

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)} / \sim_{DC} \approx \mathcal{E}_{DC}(p) \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) \approx \mathcal{P}(\mathcal{C}^1(p))$$

Définition 9.4 (PROJECTION CENTRALE UNITAIRE). Soit p un point et A un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 ne contenant pas p . On appelle **projection centrale unitaire** de A sur $\mathcal{C}^1(p)$ l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}^1(p)$ avec le demi-cône $DC(p, A)$.

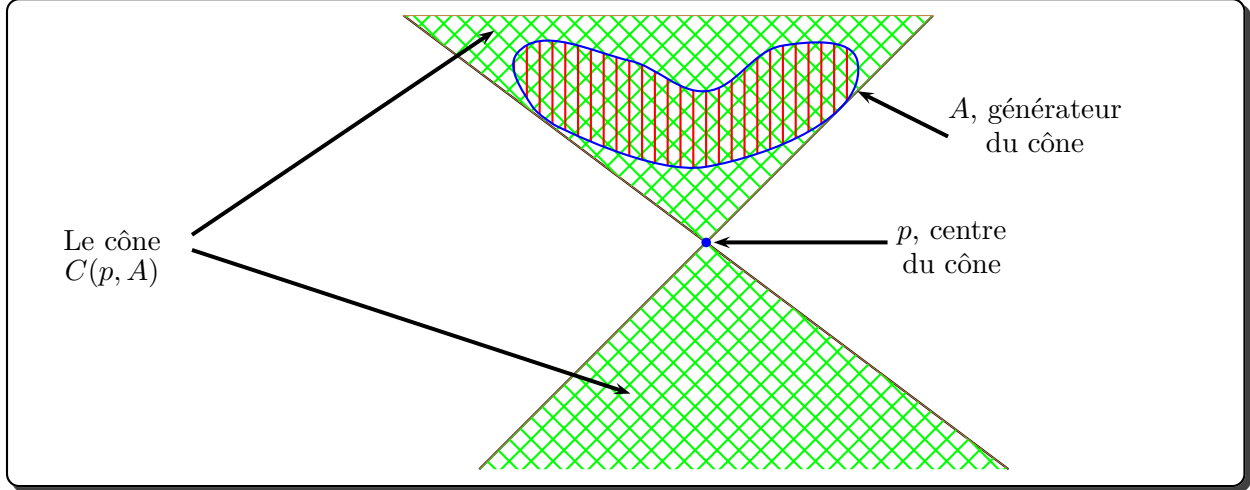
REMARQUE 9.5.

Le dernier point de la remarque (9.3) dit simplement que deux sous-ensembles A et B de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)}$ sont équivalents par la relation " \sim_{DC} " si, et seulement si, leurs projections centrales unitaires sur $\mathcal{C}^1(p)$ sont égales.

Un cas particulier de *projection centrale unitaire* est donnée par la définition ci-après.

Définition 9.6 (ARC ET BI-ARC D'INTERCEPTION). Soient $p \in \mathbb{R}^2$ un point et $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)_{(p)}$ un ensemble **connexe**. On appelle :

1. **arc d'interception** de A centré en p , et on note $AI(p, A)$, l'intersection de $\mathcal{C}^1(p)$ avec $DC(p, A)$, i.e., l'ensemble des points $c \in \mathcal{C}^1(p)$ tels qu'il existe $q \in A$ avec $[pq] \cap \mathcal{C}^1(p) = \{c\}$.
2. **bi-arc d'interception** de A centré en p , l'ensemble noté $BAI(p, A)$, qui est l'intersection de $\mathcal{C}^1(p)$ avec $C(p, A)$, i.e., la collection des points³⁸ $c \in \mathcal{C}^1(p)$ tels qu'il existe $q \in A$ avec $c \in (pq) \cap \mathcal{C}^1(p)$.

FIGURE 5 – Cône centré en p et engendré par A

REMARQUES 9.7.

1. Le bi-arc d'interception $BAI(p, A)$ de A centré en p n'est que la réunion de l'arc d'interception $AI(p, A)$ avec son symétrique par rapport à p .
2. Par connexité de A et le fait que $p \notin A$, l'ensemble $AI(p, A)$ est un arc de cercle.

9.2 Cône généralisé et cône exclusif

9.2.1 Définitions

Soient A et B deux parties non vides et disjointes du plan réel \mathbb{R}^2 (muni, rappelons-le, de la topologie euclidienne).

Définition 9.8 (CÔNES ET DEMI-CÔNES GÉNÉRALISÉS). On appelle :

1. **cône généralisé** engendré par A et B , la réunion de toutes les droites (ab) où a et b parcourent respectivement A et B . On note ce cône généralisé par $C(A, B)$
2. **demi-cône généralisé** dirigé de A vers B , noté $DC(A, B)$, la réunion de toutes les demi-droites $[ab)$ où a et b parcourent A et B , respectivement.
3. Dans les deux cas, on appelle A et B des **générateurs**.
4. Si $A \cap B \neq \emptyset$, nous posons, par convention, $C(A, B) = DC(A, B) := \mathbb{R}^2$.

REMARQUES 9.9.

1. Contrairement aux cônes généralisés, l'ordre des ensembles A et B dans l'écriture $DC(A, B)$ est important, lorsqu'on parle de demi-cônes généralisés.

38. Pour tout élément $q \in A$, l'ensemble $(pq) \cap \mathcal{C}^1(p)$ est constitué de deux points symétriques par rapport à p .

2. Le cône généralisé peut également être vu comme une application :

$$\begin{aligned} C(\cdot, \cdot) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\ (A, B) &\longmapsto C(A, B) := \bigcup_{a \in A, b \in B} (ab), \text{ si } A \cap B = \emptyset \\ (A, B) &\longmapsto C(A, B) := \mathbb{R}^2, \text{ sinon} \end{aligned}$$

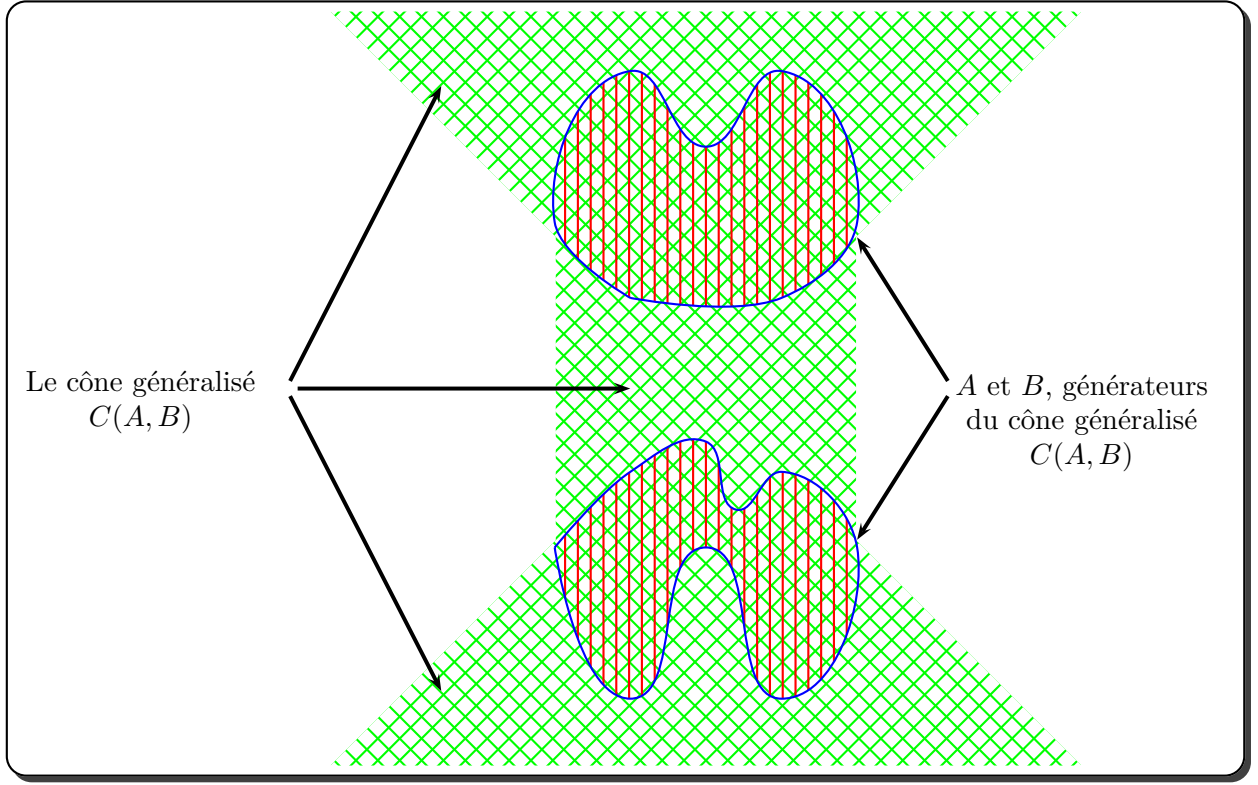


FIGURE 6 – Cône généralisé engendré par A et B

Définition 9.10 (CÔNES EXCLUSIFS). Soit A un sous-ensemble disconnexe³⁹ de \mathbb{R}^2 et soit $CoCo(A)$ l'ensemble de ses composantes connexes.

On appelle **cône généralisé exclusif** de A , l'ensemble :

$$Ce(A) := \bigcup_{E \neq F \in CoCo(A)} C(E, F)$$

c'est-à-dire la réunion de tous les cônes généralisés engendrés par les couples de composantes connexes distinctes de A , en d'autres termes, la réunion de tous les cônes généralisés dont les générateurs sont les couples de composantes connexes de A .

On dit que A est à **cône exclusif propre**, si $Ce(A) \neq \mathbb{R}^2$.

REMARQUE 9.11.

Les cas qui nous intéressent sont :

1. A est un ensemble fini ayant au moins deux points. Dans ce cas, A est toujours à cône exclusif propre, de plus le cône exclusif $Ce(A)$ n'est que la réunion des droites passant par les couples de ses points.
2. A est un ensemble infini mais possède un nombre fini de composantes connexes (au moins deux composantes), et plus particulièrement, lorsque A est une union finie de courbes algébriques réelles, avec A lisse⁴⁰ (voir les conditions (10.15)).

39. Un ensemble est dit **disconnexe**, s'il a au moins deux composantes connexes non vides.

40. Une courbe est dite **lisse**, si tous ses points sont réguliers (sans points singuliers).

9.2.2 Conditions suffisantes de fermeture des cônes généralisés

REMARQUE 9.12.

La fermeture des ensembles A et B n'entraîne pas celle du cône généralisé qu'ils engendrent $C(A, B)$, comme le montre l'exemple ci-dessous, et les conditions nécessaires et suffisantes de fermeture sont, en général, difficiles à obtenir.

Exemple 9.13. On pose $A = \{(0, 0)\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \cdot y = 1 \text{ et } x > 0\}$.

Dans ce cas, $C(A, B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \cdot y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ (voir la figure 7).

Il est clair que A et B sont tous deux des sous-ensembles fermés de \mathbb{R}^2 , mais ceci n'est pas le cas du cône généralisé $C(A, B)$. Ce cône n'est ni un ouvert, ni un fermé, de \mathbb{R}^2 .

Voici une condition suffisante pour la fermeture du cône généralisé $C(A, B)$.

Proposition 9.14 (FERMETURE PAR COMPACITÉ DES GÉNÉRATEURS). *Si A et B sont compacts, alors $C(A, B)$ est fermé.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que tout point p de l'adhérence de $C(A, B)$ est un point de celui-ci.

Fixons-nous donc un point $p \in \text{adh}(C(A, B))$ et soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $C(A, B)$ ayant p comme limite. Il existe donc deux suites, $S_A := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $S_B := (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de points de A et B , respectivement, telles que $p_n \in (a_n b_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Par compacité de A et B , on peut extraire deux sous-suites, S'_A et S'_B , de S_A et S_B convergeant, respectivement, vers $a \in A$ et $b \in B$. De plus, on a $a \neq b$ (A et B sont disjoints). Par ailleurs, comme les points a_n , b_n et p_n sont alignés, ce qui se traduit par $\det(\overrightarrow{p_n a_n}, \overrightarrow{p_n b_n}) = 0$ ⁴¹, on aura par conséquent $\det(\overrightarrow{p a}, \overrightarrow{p b}) = 0$ (par passage à la limite). Ceci prouve que $p \in (ab)$ et donc $p \in C(A, B)$.

REMARQUE 9.15.

La compacité de A et B est une condition seulement suffisante pour la fermeture du cône généralisé $C(A, B)$, elle n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple ci-dessous.

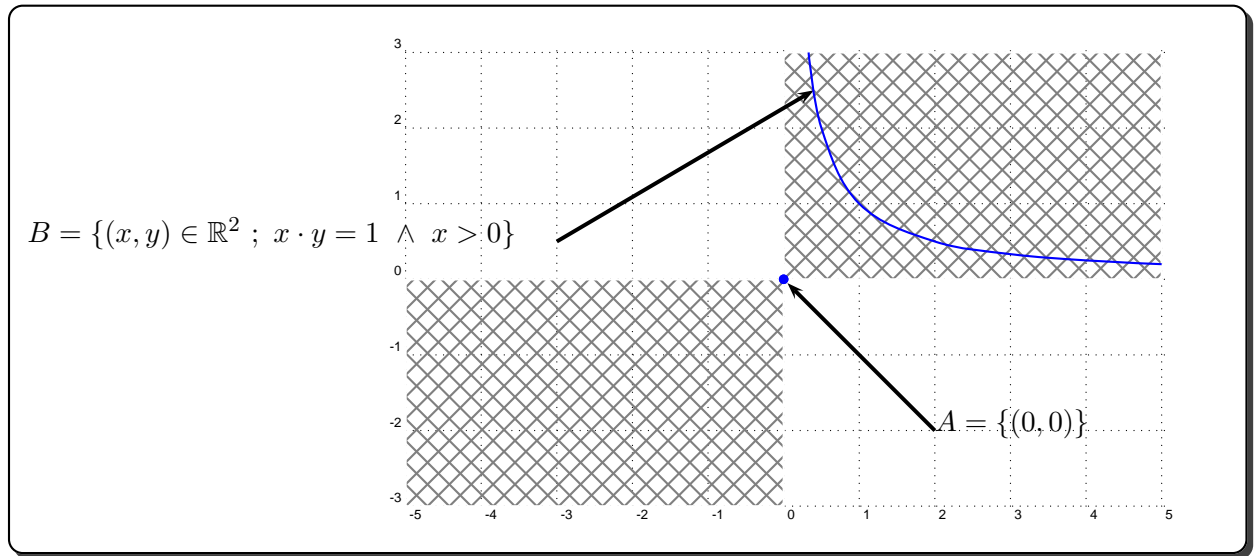


FIGURE 7 – Exemple de cône centré non fermé engendré par des ensembles fermés.

41. $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ désigne le déterminant de la matrice définie par les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} . L'annulation de ce déterminant signifie que les vecteurs sont colinéaires.

Exemple 9.16 (NON NÉCESSITÉ DES CONDITIONS DE COMPACTITÉ). Posons :

$$A = \{(x, y); -1 < y < 1 \text{ et } x \leq -1\} \cup \{(-1, 1), (-1, -1)\}; \text{ et}$$

$$B = \{(x, y); -1 < y < 1 \text{ et } x \geq 1\} \cup \{(1, 1), (1, -1)\}.$$

Il est clair que le cône généralisé $C(A, B)$ est fermé. Plus précisément, on a :

$$C(A, B) = \{(x, y); |y| \leq |x|\} \cup \{(x, y); |y| \leq 1\},$$

sans condition de compacité sur A et B (A et B ne sont d'ailleurs pas fermés).

9.2.3 Caractérisation du cône généralisé

La définition précédente de *cône généralisé* est d'une nature double : *géométrique* et *ensembliste*. Nous avons, néanmoins, une autre définition qui, cette fois-ci, est à ancrage analytique, voire même topologique. Cette autre caractérisation des cônes généralisés nous offre une vision plus ou moins simple du point de vue géométrico-analytique.

NOTATIONS 9.17.

On se donne deux sous-ensembles non vides et disjoints du plan réel, disons A et B , que nous supposons, de plus, connexes. On pose les notations⁴² suivantes :

1.

$$S := \{\Delta := (D = 0); (D|_A > 0 \text{ et } D|_B \leq 0) \text{ ou } (D|_A \geq 0 \text{ et } D|_B < 0); \\ \text{où } D = \alpha x + \beta y + \gamma \in \mathbb{R}[x, y], \text{ avec } \alpha \cdot \beta \neq 0 \in \mathbb{R}\}$$

est l'ensemble des droites séparant strictement A et B .

2. $\tilde{S} := \bigcup_{\Delta \in S} \Delta$ désigne la réunion des droites séparant strictement A et B .

3. $\tilde{C} := \bigcup_{a \in A, b \in B} [ab]$ est la réunion des segments ayant leurs extrémités respectives dans A et B .

REMARQUE 9.18.

Les notations $D|_A$ et $D|_B$ désigneront les restrictions d'un polynôme $D \in \mathbb{R}[x, y]$, vu comme fonction sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles, aux sous-ensembles A et B , i.e., :

$$D|_A : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D|_B : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

Proposition 9.19. Si A et B sont des ensembles connexes et disjoints de \mathbb{R}^2 , alors :

$$C(A, B) = \tilde{C} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{S}).$$

DÉMONSTRATION. \supseteq : On peut vérifier assez facilement que :

$$\tilde{C} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{S}) = \tilde{C} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus (\tilde{S} \cup \tilde{C}))$$

L'union dans le membre de droite de cette dernière égalité est clairement disjointe. Montrons que chacune des parties qui la composent est incluse dans le cône généralisé $C(A, B)$.

$\tilde{C} \subseteq C(A, B)$:

\tilde{C} est l'ensemble des points des segments $[ab]$ où $a \in A$ et $b \in B$. Si $c \in \tilde{C}$, alors $\exists (a, b) \in A \times B$ tel que $c \in [ab] \subset (ab) \subset C(A, B)$

$(\mathbb{R}^2 \setminus (\tilde{S} \cup \tilde{C})) \subseteq C(A, B)$:

Soit $p \in \mathbb{R}^2 \setminus (\tilde{S} \cup \tilde{C})$, donc aucune droite passant par p ne sépare strictement (au sens de la définition de \tilde{S}) A et B . On dénombre deux types de droites passant par p :

42. S , \tilde{S} et \tilde{C} dépendent bien sûr de A et B .

I) Celles passant par des points de B , composant ainsi le cône $CP(p, B)$, centré en p et dirigé vers B .

II) Celles ne passant par aucun point de B .

Si $C(p, B) \cap A \neq \emptyset$, alors $p \in C(A, B)$.

Si maintenant $C(p, B) \cap A = \emptyset$, alors A sera dans l'union des droites du second type, donc l'une des droites délimitant l'arc d'interception $AI(p, B)$ sépare strictement (au sens indiqué ci-dessus) A et B , et comme cette droite passe également par p , ceci contredit l'hypothèse affirmant que $p \notin \tilde{S}$. Ceci montre que $C(p, B)$ doit intersecter l'ensemble A , ce qui nous donne ainsi au moins deux points, $a \in A$ et $b \in B$, tels que $p \in (ab)$, i.e., $p \in C(A, B)$.

\subseteq : Il suffit de montrer que $C(A, B) \setminus \tilde{C} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{S}$.

Supposons que $p \in C(A, B) \setminus \tilde{C}$ et montrons qu'aucune droite passant par p ne sépare A et B .

Cas 1) Les droites du cône $C(p, B)$ ne séparent pas A et B , sauf au plus celles délimitant $AI(p, B)$. Mais comme $p \in C(A, B)$, donc $\exists a \in A$ et $\exists b \in B$ tels que $p \in (ab)$, ce qui montre que le signe du polynôme associé la droite (ab) , est le même⁴³ en a et en b (égal à 0), donc chaque droite passant par p ne peut séparer A et B .

Cas 2) De même, une droite passant par p et n'étant pas incluse dans $C(p, B)$ possède la même propriété que les droites délimitant $AI(p, B)$, donc ne sépare pas A et B ⁴⁴.

Ceci montre que p ne peut-être dans \tilde{S} , c'est-à-dire que $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{S}$ et donc $C(A, B) \setminus \tilde{C} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{S}$.

9.2.4 Conditions de globalité

La caractérisation du cône généralisé donnée dans la proposition (9.19) nous donne deux conditions suffisantes pour qu'il soit égal à \mathbb{R}^2 . Plus précisément, on a :

Corollaire 9.20.

- i) Si $\tilde{C} = \mathbb{R}^2$, alors $C(A, B) = \mathbb{R}^2$.
- ii) Si $\tilde{S} = \emptyset$, alors $C(A, B) = \mathbb{R}^2$.

Exemple 9.21.

1. Si A et B sont deux droites sécantes, alors $C(A, B) = \mathbb{R}^2$.
2. Si A et B sont deux ovales qui s'emboîtent, alors $C(A, B) = \mathbb{R}^2$.

9.2.5 Questions ouvertes : Cônes généralisés et cônes exclusifs

1. Étudier la répartition des **trous**⁴⁵ du cône exclusif d'un ensemble E , en fonction de ses composantes connexes et de leurs positions relatives dans le plan \mathbb{R}^2 .
2. Trouver des conditions sur un tel ensemble E pour que son cône généralisé soit propre ou global (égal à \mathbb{R}^2).
3. Trouver des conditions de fermeture d'un cône généralisé.
4. Étudier les propriétés topologiques et combinatoires du projectif d'un cône exclusif engendré par un nombre fini ou infini de composantes connexes et déterminer d'éventuels invariants d'un tel cône.
5. Étudier les cônes généralisés en dimension supérieure.

⁴³. Ceci n'est pas vrai si $p \in \tilde{C}$.

⁴⁴. Encore une fois, car $p \notin \tilde{C}$.

⁴⁵. Un trou est une composante connexe du complémentaire d'un cône exclusif.

10 Sur certaines familles V -universelles

Mots-clés : Espaces d'ordres de $\mathbb{R}(x, y)$, conjecture pp , formules V -universelles et formules P -universelles, cônes généralisés et cônes exclusifs, principe de transfert, transmission de la positivité.

Références : [AT], [BCR], [DMM], [Ell], [GM1], [GM2], [Mar12], [Mar14], [Meg], [Rui1]

Résumé

Dans un article paru en 2008 (voir [GM2]), P. Gładki et M. Marshall parviennent à donner un premier contre-exemple à la conjecture pp pour l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$ qui, rappelons-le, est d'indice de stabilité 2.

Il est à noter que la "géométrie" du contre-exemple donné dans [GM2] est très similaire à celle du cas des "coniques rationnelles" (voir [GM1]). La formule pp utilisée pour réfuter cette conjecture, dans les deux situations, est du même type, ce que nous appellerons **formules produits de rang 3** (voir section §8). Ceci dit, les techniques utilisées dans le cas de l'espace d'ordres $(X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$ n'utilisent aucun argument de la théorie des valuations.

Nous allons nous intéresser tout au long de cette section à la construction d'une famille de formules pp , que nous baptiserons **formules V -universelles**, vérifiant le principe local-global dans le cas de l'espace d'ordres $(X, G) := (X_{\mathbb{R}(x,y)}, G_{\mathbb{R}(x,y)})$. La "mécanique" de construction des formules pp que nous présenterons ici est inspirée des techniques utilisées dans [DMM] ainsi que de certaines propriétés des "cônes plans généralisés".

L'idée consiste à construire, à partir d'une famille de polynômes (éléments de $\mathbb{R}[x, y]$), dont la courbe définie par leur produit vérifie les conditions (10.15), un sous-espace (Y, H) de (X, G) pour lequel toute formule pp Φ , à paramètres dans cette famille de polynômes est vérifiée dans (X, G) si, et seulement si, elle l'est dans (Y, H) . L'implication directe de cette équivalence est triviale, quant à sa réciproque, en choisissant un point p du plan (dit **de contrôle**), et en modifiant un témoin de vérité de Φ dans (Y, H) , en remplaçant certains facteurs de ses coordonnées par des **formes affines** (polynômes de degré 1 s'annulant en p), on obtient un témoin de vérité de Φ dans (X, G) . Le **principe de Transfert** est nécessaire à l'étape suivante, dite de **transmission de la positivité**, où la validité locale de Φ ne s'opère que sur un nombre fini d'éventails de 4 éléments. Nous terminerons par proposer deux méthodes de construction de familles V -universelles, la première utilise un cercle et un nombre fini de points ayant une disposition spécifique sur celui-ci, et la seconde, un type particulier d'étoiles ayant un nombre impair de branches.

10.1 Familles et formules V -universelles

Soient (X, G) un espace d'ordres abstrait et $S \subset G$ un sous-ensemble non vide (fini ou infini) d'éléments de G .

Définition 10.1 (FAMILLES ET FORMULES V -UNIVERSELLES).

1. On dit que S est une **famille V -universelle**⁴⁶ sur (X, G) si pour toute formule pp $\Phi(\underline{a}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a})$, ayant comme paramètres $\underline{a} := (a_1, \dots, a_m)$ et $\underline{t} := (t_1, \dots, t_n)$ comme variables, et pour toute assignation \underline{A} pour \underline{a} dans S^m , $\Phi(\underline{A})$ vérifie le principe local-global sur (X, G) .
2. Une **formule V -universelle** sur (X, G) est une formule pp munie d'une assignation dans une famille V -universelle $S \subset G$.

46. La lettre "V" désigne le mot "Variables".

10.2 Notations et réduction du passage *local-global*

Pour toute la suite de cette section, (X, G) désignera l'espace d'ordres du corps $\mathbb{R}(x, y)$, où :

- $X := X_{\mathbb{R}(x, y)}$ (l'espace topologique des ordres de $\mathbb{R}(x, y)$).
- $G := G_{\mathbb{R}(x, y)} = \mathbb{R}(x, y)^* / (\sum \mathbb{R}(x, y)^*)^2$ (le groupe spécial réduit associé à X).

Soit également $\Phi(\underline{a})$ une formule *pp* (voir définition (6.3)), dont l'écriture formelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{a}) &= \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{a}) \\ &= \exists \underline{t} \bigwedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i(\underline{t}, \underline{a}) \\ &= \exists \underline{t} \bigwedge_{i=1}^{i=r} 1 \in D(P_i(\underline{t}, \underline{a}), Q_i(\underline{t}, \underline{a})) \end{aligned}$$

P_i et Q_i ($i \in \{1, \dots, r\}$) sont, modulo une constante ± 1 , des produits finis des t_l et a_k (avec $l \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{1, \dots, m\}$), c'est-à-dire des éléments du groupe multiplicatif d'exposant 2 engendré par $\{-1, t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_m\}$, qu'on note simplement par $\mathbb{Z}_2[\underline{t}, \underline{a}]$ ⁴⁷.

REMARQUES 10.2.

1. Nous garderons à l'esprit le fait que les paramètres a_k et les variables quantifiées t_l prennent leurs valeurs, soit dans le groupe spécial G ou bien dans un quotient G/Δ de G , où Δ désigne un sous-groupe saturé de G .
2. Chacune des interprétations des a_k et t_l dans ces ensembles possède des représentants dans $\mathbb{R}[x, y]^* := \mathbb{R}[x, y] \setminus \{0\}$, i.e., des polynômes non nuls, qui peuvent être choisis sans sommes de carrés dans $\mathbb{R}(x, y)$ comme facteurs.
3. Nous réserverons les notations en "lettres minuscules" a_k et t_l pour l'écriture **abstraite**, i.e., l'écriture formelle dans le langage des groupes spéciaux, de $\Phi(\underline{a})$ (sans référence à un domaine de substitution des paramètres et des variables quantifiées), et les notations en "lettres majuscules" ($A_k, T_l, S_l \dots$) pour l'interprétation de $\Phi(\underline{a})$ dans l'un des ensembles (G ou G/Δ) pour une assignation déterminée aux variables et paramètres.
4. Sauf risque de confusion, nous utiliserons la même notation pour les interprétations A_k et T_l , des a_k et t_l , dans G ou G/Δ , que pour leurs représentants dans $\mathbb{R}[x, y]^*$.
5. En chassant les sommes des carrés et en utilisant la factorialité de l'anneau $\mathbb{R}[x, y]$, chaque élément g , de G ou de G/Δ , possède un représentant $f \in \mathbb{R}[x, y]^*$ pour lequel : $\forall \pi \in \mathbb{R}[x, y]^*$, un polynôme irréductible réel⁴⁸ ; $\nu_\pi(f) \in \{0, 1\}$, où ν_π est la valuation π -adique sur $\mathbb{R}(x, y)$.

Fixation des paramètres Supposons, pour toute la suite de cette section que, pour une assignation de valeurs A_k dans G , aux paramètres a_k , la formule $\Phi(\underline{A})$ est vérifiée localement sur (X, G) , i.e., vérifiée dans tout sous-espace fini de (X, G) .

NOTATIONS 10.3 (DÉFINITION DE Σ , \mathcal{C} , $CoCo(\mathcal{C})$ ET $Ce(\mathcal{C})$).

1. Pour un choix de représentants (sans sommes de carrés) d'une assignation des paramètres, disons A_k ($k \in \{1, \dots, m\}$) dans $\mathbb{R}[x, y]^*$, on définit Σ comme étant l'ensemble des facteurs irréductibles (réels) des A_k ; i.e., :

$$\Sigma := \{ \pi \in \mathbb{R}[x, y]^* ; \pi \text{ est irréductible et } \exists k \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } \pi | A_k \}$$

47. Il ne faut pas confondre cette notation avec celles des anneaux de polynômes et des extensions algébriques qui, elles, sont des ensembles composés des sommes finies de ces produits avec, éventuellement, des relations de dépendance entre ces derniers.

48. Un polynôme π est dit **réel** si l'anneau quotient $\mathbb{R}[x, y]/(\pi)$ est formellement réel, i.e., ayant un **spectre réel** non vide (voir [BCR]).

2. Par ailleurs, $\forall \pi \in \Sigma$, on note par :

- $\mathcal{C}_\pi := \{r \in \mathbb{R}^2 ; \pi(r) = 0\}$, la courbe irréductible plane des zéros réels de π .
- $\mathcal{C} := \bigcup_{\pi \in \Sigma} \mathcal{C}_\pi$, la réunion des courbes, lieux des zéros, de tous les éléments de Σ .
- $\text{CoCo}(\mathcal{C})$ l'ensemble des composantes connexes de \mathcal{C} .
- $\text{Ce}(\mathcal{C})$ le cône exclusif de \mathcal{C} (voir définition (9.10)).
- v_π la valuation associée à π sur $\mathbb{R}(x, y)$ (voir paragraphe #3.6).
- $\mathcal{A}_\pi, \mathcal{M}_\pi, \Gamma_\pi$ et $k(\pi) := \mathcal{K}_{v_\pi}$, respectivement, l'anneau de valuation, l'idéal maximal, le groupe des valeurs et le corps résiduel associés à la valuation v_π .
- (X_π, G_π) le sous-espace d'ordres de (X, G) composé des **ordres compatibles**⁴⁹ avec la valuation v_π (voir définition 3.46) et $(X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})$ l'espace d'ordres du corps résiduel $k(\pi)$.

REMARQUE 10.4.

1. Abstraction faite du cas où certains paramètres A_k sont représentés par des constantes (éléments de \mathbb{R}^*), dans ce cas $A_k \in \{1, -1\}$ dans G et dans tout quotient G/Δ , Σ sera composé uniquement de polynômes irréductibles (réels) de $\mathbb{R}[x, y]^*$.
2. Par le théorème de Baer-Krull (voir (3.49)), (X_π, G_π) est une extension de $(X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})$.

Plus précisément, si $\pi \in \Sigma$, alors :

Proposition 10.5. $(X_\pi, G_\pi) \simeq (X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})[\mathbb{Z}_2]$ est un isomorphisme d'espaces d'ordres.

DÉMONSTRATION. Cette proposition est une conséquence directe du théorème de Baer-Krull (voir paragraphe (3.6)) et du lemme suivant :

Lemme 10.6. $(\Gamma_\pi/2\Gamma_\pi, +) \simeq (\mathbb{Z}_2, \cdot)$ est un isomorphisme de groupes commutatifs.

DÉMONSTRATION. En effet ; $\Gamma_\pi = \mathbb{Z}$, et $2\Gamma_\pi = 2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe additif à deux éléments $(\{0, 1\}, +, 0)$, donc isomorphe au groupe multiplicatif d'exposant 2, $\mathbb{Z}_2 = (\{\pm 1\}, \cdot, 1)$.

Proposition 10.7. L'espace d'ordres $(X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})$ vérifie la conjecture pp.

DÉMONSTRATION. Le couple $(X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})$ est l'espace d'ordres du corps de fonctions d'une courbe algébrique réelle associée à l'idéal premier $(\pi) = \pi \cdot \mathbb{R}[x, y]$, où le corps de base \mathbb{R} est réel clos, il est donc d'indice de stabilité 1. $(X_{k(\pi)}, G_{k(\pi)})$ vérifie donc la conjecture pp (Voir [Mar12]).

Corollaire 10.8. (X_π, G_π) vérifie la conjecture pp.

DÉMONSTRATION. Immédiate à partir des propositions (10.7) et (10.5) ainsi que du théorème de stabilité de la conjecture pp par l'opération d'extension des espaces d'ordres par des groupes d'exposant 2 (voir Théorème (6.17)).

Proposition 10.9. Les sous-ensembles de X , X_π (quand π parcourt Σ), sont deux-à-deux disjoints.

DÉMONSTRATION. L'ensemble X_π est composé des ordres (éléments de X) issus des demi-branches algébriques signées supportées sur la courbe \mathcal{C}_π . Or, par le théorème de séparation des semi-algébriques, plus particulièrement des demi-branches algébriques (voir [Rui1]), deux telles demi-branches supportées deux courbes différentes \mathcal{C}_π et $\mathcal{C}_{\pi'}$ sont toujours *séparables* par un élément $f \in \mathbb{R}[x, y]^*$ (pris modulo les sommes des carrés dans $\mathbb{R}(x, y)^* / \sum (\mathbb{R}(x, y)^*)^2$), donc les ordres associés à ces deux demi-branches ont des signes distincts en $\bar{f} \in G$, ce qui signifie que deux tels ordres sont distincts, ce qui prouve que $X_\pi \cap X_{\pi'} = \emptyset$.

49. Le domaine topologique X_π est composé des ordres de X associés aux **demi-branches signées** supportées sur \mathcal{C}_π et centrées en les points (finis ou infinis) de \mathcal{C}_π (voir section §5).

Définition 10.10 (DÉFINITION DU SOUS-ESPACE (Y, H)). Nous associons à Σ , donc aux paramètres A_k , le sous-espace d'ordres (Y, H) de (X, G) , qu'on obtient en utilisant l'opération de somme directe des sous-espaces (X_π, G_π) , et qu'on définit comme suit :

$$(Y, H) := \bigoplus_{\pi \in \Sigma} (X_\pi, G_\pi) \quad ; \quad \text{où} \quad Y := \bigcup_{\pi \in \Sigma} X_\pi \text{ et } H := \prod_{\pi \in \Sigma} G_\pi$$

Proposition 10.11. (Y, H) vérifie la conjecture *pp*.

DÉMONSTRATION. On combine la stabilité de la conjecture *pp* par somme directe finie d'espaces d'ordres (voir proposition (6.16)) et le corollaire (10.8), ci-dessus.

REMARQUES 10.12.

1. (Y, H) est la somme directe de sous-espaces disjoints de (X, G) ; il s'identifie ainsi à un sous-espace de ce dernier. H est donc un quotient de G par un sous-groupe saturé, et en particulier tout élément $h \in H$ peut-être représenté par un polynôme non nul, qu'on note également par $h \in \mathbb{R}[x, y]^*$, sans sommes de carrés dans sa décomposition en facteurs irréductibles.
2. La définition de (Y, H) ne dépend pas de l'écriture de la formule $\Phi(\underline{a})$, mais uniquement de l'assignation \underline{A} de ses paramètres, donc de Σ .

Corollaire 10.13. La formule $\Phi(\underline{A})$, étant vérifiée localement sur (X, G) , pour le choix fait plus haut des paramètres A_k , elle l'est par conséquent localement et globalement sur (Y, H) .

DÉMONSTRATION. En combinant le fait que tout sous-espace de (Y, H) est aussi un sous-espace de (X, G) avec la proposition (10.11).

REMARQUE 10.14 (RÉDUCTION DU PASSAGE LOCAL-GLOBAL).

Pour montrer que la formule $\Phi(\underline{A})$ vérifie le principe local-global sur (X, G) , il suffit de montrer que sa vérification dans (Y, H) entraîne sa vérification dans (X, G) , ce qui n'est pas acquis sans conditions sur les paramètres et/ou variables de celle-ci (voir [GM2]), et c'est l'objet du paragraphe qui suit.

10.3 Théorème principal

On suppose que les paramètres A_k vérifient les :

Conditions 10.15.

- (1) \mathcal{C} est lisse (sans points singuliers) et possède au moins deux composantes connexes.
- (2) $\mathbb{R}^2 \setminus Ce(\mathcal{C})$ contient un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

Ces conditions ne sont pas très contraignantes, elles nous fournissent une large classe de formules *pp* vérifiant le principe local-global sur (X, G) .

REMARQUES 10.16.

1. Pour pouvoir parler de cône exclusif, \mathcal{C} doit posséder au moins deux composantes connexes.
2. La condition (2), sur le cône exclusif de \mathcal{C} , est vérifiée si par exemple les courbes \mathcal{C}_π sont compactes et disjointes (voir paragraphe #9.2.2) et que $Ce(\mathcal{C}) \neq \mathbb{R}^2$ (voir paragraphe 9.2.4).

Théorème 10.17 (THÉORÈME PRINCIPAL). *Si les conditions (10.15) sont satisfaites par Σ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $(X, G) \models \Phi(\underline{A})$.
- ii) $(Z, I) \models \Phi(\underline{A})$, pour tout sous espace propre (Z, I) de (X, G) .
- iii) $(Z, I) \models \Phi(\underline{A})$, pour tout sous espace fini (Z, I) de (X, G) .
- iv) $(Y, H) \models \Phi(\underline{A})$, où (Y, H) est le sous-espace défini dans (10.10).

REMARQUES 10.18.

1. Le théorème (10.17) dit simplement que, sous les conditions (10.15), la famille $\{A_1, \dots, A_m\}$, ou plus généralement la famille $\mathbb{Z}_2[\Sigma]$ ⁵⁰, est V -universelle sur (X, G) .
2. Les implications (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) du théorème (10.17) sont vraies dans tout espace d'ordres abstrait. L'implication (iii) \Rightarrow (iv) est donnée par le corollaire (10.13). Ces implications sont vraies sans les conditions (10.15).
3. Pour prouver le théorème (10.17), il suffit donc de prouver l'implication (iv) \Rightarrow (i), et c'est là où interviennent les conditions (10.15).

10.4 Preuve du Théorème principal

On suppose que Σ vérifie les conditions (10.15) et que $\Phi(\underline{A})$ est vérifiée sur (Y, H) , et notons par $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n) \in H^n$ des témoins de vérité de $\Phi(\underline{A})$.

Sauf risque de confusion, nous garderons la notation $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ pour des représentants de ces témoins dans $\mathbb{R}[x, y]^*$ (choisis sans sommes de carrés dans $\mathbb{R}(x, y)^*$).

Avec les notations du paragraphe #10.2, la preuve du théorème (10.17) se fera pas-à-pas en respectant les étapes suivantes :

1. Décomposition des témoins de vérité T_l de $\Phi(\underline{A})$ sur (Y, H) en facteurs irréductibles et leur classification suivant le fait qu'ils appartiennent, ou pas, à Σ . On classe également les zéros de ces facteurs irréductibles sur \mathcal{C} .
2. Classification (en deux familles complémentaires) des composantes connexes de \mathcal{C} , *i.e.*, éléments de $CoCo(\mathcal{C})$, suivant que les témoins T_l changent, ou pas, de signe sur ces composantes.
3. Choix d'un point, dit **de contrôle**, à partir duquel on définit une famille⁵¹ de polynômes de degré 1, qu'on appellera **formes affines** (voir définition (10.26)), et qui servent à construire les témoins de vérité S_l de $\Phi(\underline{A})$ sur (X, G) .
4. Construction d'une famille supplémentaire de formes affines, qu'on appellera **formes d'ajustement**, et qui servent à munir les témoins de vérité S_l des *bonnes distributions de signe* en les points qui nous intéressent.
5. Construction des témoins de vérité S_l de $\Phi(\underline{A})$ sur (X, G) .
6. Etablir un principe, dit de **transmission de la positivité**, permettant de montrer la validité des atomes de $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$ sur (X, G) .
7. Finalement, montrer la validité des atomes de $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$ sur (X, G) .

50. On sous-entend par l'image de Σ dans G , celle de Σ par la surjection canonique $\mathbb{R}[x, y]^* \twoheadrightarrow G$. Un élément de $\mathbb{Z}_2[\Sigma]$ est juste un produit de ± 1 par un nombre fini d'éléments de Σ ou de leurs classes dans G , selon le contexte.

51. Il s'agit d'un ensemble de polynômes définissant des droites *concourantes* en ce point, *i.e.*, s'intersectant en ce dernier.

10.4.1 Décomposition des témoins de vérité sur (Y, H)

NOTATIONS 10.19 (DÉFINITION DE Σ' ET \mathcal{C}').

Par factorialité de $\mathbb{R}[x, y]$, les représentants T_l , choisis dans $\mathbb{R}[x, y]^*$, des témoins de vérité de $\Phi(\underline{A})$ sur (Y, H) , se factorisent de façon unique⁵² comme produits de polynômes irréductibles :

$$T_l := \pi_{l_1} \dots \pi_{l_{r_l}} \cdot \pi'_{l_1} \dots \pi'_{l_{s_l}},$$

où $\pi_{l_{\mu_l}}$ ($\mu_l \in \{1, \dots, r_l\}$) sont les facteurs irréductibles de T_l appartenant à Σ et $\pi'_{l_{\nu_l}}$ ($\nu_l \in \{1, \dots, s_l\}$) ceux qui n'y sont pas.

Posons $T_l := \tilde{T}_l \cdot T'_l$, avec : $\tilde{T}_l := \pi_{l_1} \dots \pi_{l_{r_l}}$ et $T'_l := \pi'_{l_1} \dots \pi'_{l_{s_l}}$.

Notons par Σ' l'ensemble des polynômes $\pi'_{l_{\nu_l}}$, où ν_l parcourt l'ensemble $\{1, \dots, s_l\}$ quand l parcourt $\{1, \dots, n\}$, et par \mathcal{C}' la courbe des zéros réels du produit $\prod_{\pi' \in \Sigma'} \pi'$.

REMARQUE 10.20 (CLASSIFICATION DES COMPOSANTES CONNEXES DE \mathcal{C}).

On définit une partition de $CoCo(\mathcal{C})$ en deux classes de composantes connexes, que nous noterons respectivement :

$CoCo_1(\mathcal{C})$: Elle contient les composantes connexes de \mathcal{C} sur lesquelles au moins un élément de Σ' s'annule en changeant de signe sur un nombre fini de points de ces composantes, i.e., possède des valeurs positives et négatives.

$CoCo_2(\mathcal{C})$: Elle contient le reste des composantes connexes de \mathcal{C} , i.e., celles sur lesquelles chaque élément de Σ' possède un signe constant (avec éventuellement un nombre fini de zéros sans changements de signe).

La finitude des nombres de zéros des éléments de Σ' sur ces composantes s'obtient en utilisant le théorème de Bézout sur l'intersection des courbes algébriques planes.

On a donc la réunion disjointe :

$$CoCo(\mathcal{C}) = CoCo_1(\mathcal{C}) \bigsqcup CoCo_2(\mathcal{C}).$$

On reformule, en langage symbolique, les définitions des classes de composantes précédentes comme suit :

Définition de $CoCo_1(\mathcal{C})$:

$$C \in CoCo_1(\mathcal{C}) \iff \exists \pi' \in \Sigma' ; C \not\subseteq (\pi' \geq 0) \text{ et } C \not\subseteq (\pi' \leq 0). \quad (9)$$

Ce qui se traduit aussi par :

$$C \in CoCo_1(\mathcal{C}) \iff \exists \pi' \in \Sigma' \exists r, s \in C ; (\pi'(r) > 0) \text{ et } (\pi'(s) < 0). \quad (10)$$

Définition de $CoCo_2(\mathcal{C})$:

$$C \in CoCo_2(\mathcal{C}) \iff \forall \pi' \in \Sigma' ; C \subseteq (\pi' \geq 0) \text{ ou } C \subseteq (\pi' \leq 0). \quad (11)$$

Intéressons-nous d'abord aux composantes du premier type.

52. Modulo les constantes non nulles de $\mathbb{R}[x, y]$, i.e., modulo les éléments de \mathbb{R}^* .

◆ Examen des éléments de $CoCo_1(\mathcal{C})$

Lemme 10.21. Soient $C \in CoCo_1(\mathcal{C})$ et $\pi' \in \Sigma'$ tel que $C \not\subseteq (\pi' \geq 0)$ et $C \not\subseteq (\pi' \leq 0)$. Alors C contient un nombre fini de points q_1, \dots, q_N en lesquels π' s'annule et possède des signes différents sur les deux demi-branches centrées en chacun des q_i et supportées sur C .

NOTATIONS 10.22 (DÉFINITION DE \mathcal{E}).

1. Pour chaque $\pi' \in \Sigma'$, on note par $E(\pi')$ l'ensemble des points de \mathcal{C} en lesquels π' s'annule en changeant de signe sur \mathcal{C} , ce qui signifie que $E(\pi')$ est constitué des points d'intersection transversale, ou plus généralement des croisements d'ordre impair des courbes \mathcal{C} et $\mathcal{C}_{\pi'} := (\pi' = 0)$, ainsi que des points de rebroussement de $\mathcal{C}_{\pi'}$ dont les demi-branches supportées sur $\mathcal{C}_{\pi'}$ sont séparées par \mathcal{C} , i.e., par le produit $\prod_{\pi \in \Sigma} \pi$. Ceci dit, $\mathcal{C}_{\pi'}$ peut intersecter \mathcal{C} en des points en lesquels π' ne change pas de signe (penser à des point de tangence, des points de rebroussement de $\mathcal{C}_{\pi'}$ dont les demi-branches ne sont pas séparées par \mathcal{C} (i.e., par $\prod_{\pi \in \Sigma} \pi$), des croisement d'ordre pair de $\mathcal{C}_{\pi'}$ avec \mathcal{C} et à des points isolés de $\mathcal{C}_{\pi'}$ appartenant à \mathcal{C}), $E(\pi')$ ne contiendra pas tous ces derniers. En d'autres termes, si $\pi' \in \Sigma'$ et $q \in E(\pi')$, alors il existe un ouvert $U(q)$ du plan réel, contenant q , pour lequel $(\mathcal{C} \cap U(q)) \setminus \{q\}$ possède deux composantes connexes⁵³ sur lesquelles π' possède des signes distincts.
2. On note la réunion $\bigcup_{\pi' \in \Sigma'} E(\pi')$ par \mathcal{E} .
3. Enfin, à chaque T'_l , on associe le sous-ensemble $E(T'_l)$ de \mathcal{E} des points de \mathcal{C} en lesquels T'_l s'annule en changeant de signe sur \mathcal{C} , qui est défini comme suit :
Soit $q \in \mathcal{E}$; alors $q \in E(T'_l)$ si, et seulement si, q appartient à un nombre impair de sous-ensembles $E(\pi')$, où π' divise T'_l , i.e., si, et seulement si, parmi les $E(\pi'_{l_1}), \dots, E(\pi'_{l_{s_l}})$, il y a un nombre impair d'entre-eux contenant q .

REMARQUES 10.23.

1. Les ensembles \mathcal{E} , $E(T'_l)$ (où $l \in \{1, \dots, n\}$) et les $E(\pi')$ (π' parcourt Σ') sont tous finis (voir remarque (10.20)), certains pouvant être vides.
2. Noter également que : $\mathcal{E} = \emptyset \iff CoCo_1(\mathcal{C}) = \emptyset$.
En effet, $CoCo_1(\mathcal{C})$ est, par définition, l'ensemble des composantes connexes $C \subset \mathcal{C}$ telles que $C \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Dans ce cas, $E(T'_l) = \emptyset$ ($\forall l \in \{1, \dots, n\}$) et $E(\pi') = \emptyset$ ($\forall \pi' \in \Sigma'$).

10.4.2 Choix d'un point de contrôle

Le lemme suivant constitue la clé principale pour la construction des témoins de vérité de $\Phi(\underline{A})$ sur l'espace d'ordres (X, G) .

Lemme 10.24 (EXISTENCE D'UN POINT DE CONTRÔLE). Sous les conditions (10.15), il existe un ouvert non vide $U_{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^2$, tel que $\forall p \in U_{\mathcal{C}}$ les assertions suivantes sont vérifiées :

- i) $p \notin Ce(\mathcal{C})$ (p n'appartient pas au cône exclusif de \mathcal{C}).
- ii) $\forall q \in \mathcal{E}$, $(pq) \cap \mathcal{E} = \{q\}$.
- iii) $\forall q \in \mathcal{E}$, la droite (pq) intersecte la courbe \mathcal{C} , transversalement, en tout point.

Pour prouver ce lemme, on aura besoin du :

⁵³. Ces composantes connexes sont les demi-branches centrées en q et supportées sur \mathcal{C} . Par *lissité* de la courbe \mathcal{C} , il en existe deux de ces demi-branches, qui donnent lieu, comme on le verra plus loin, à un éventail de 4 éléments qu'on notera par (X_q, G_q) .

Fait 10.25. Soit $C := (\pi = 0)$ une courbe algébrique réelle plane, définie par un polynôme irréductible réel $\pi \in \mathbb{R}[x, y]$, et q un point du plan \mathbb{R}^2 . Alors l'ensemble des droites D passant par q et vérifiant l'une (voire les deux) des conditions ci-dessous est fini :

- i) D passe par un point singulier de C
- ii) D est tangente à C

INDICATION. L'ensemble des droites vérifiant la première condition découle de la finitude du nombre de points singuliers d'une courbe algébrique. Quant à la deuxième condition, s'il existait un nombre infini de telles tangentes, il y aurait un nombre infini de points d'*inflexion* sur C , i.e., l'équation polynomiale $\mathbb{H}(\pi) = 0$, annulation du *hessien*⁵⁴ $\mathbb{H}(\pi)$ de π , i.e., le déterminant de la matrice composée des dérivées secondes de π en les variables x et y , aurait une infinité de solutions, ce qui est impossible. Cet ensemble est donc fini.

PREUVE (DU LEMME (10.24)). L'ouvert U_C s'obtient par raffinements successifs d'ouverts vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) de l'énoncé.

- i) Le point (i) est vérifié par la deuxième condition de (10.15), portant sur l'existence d'un ouvert non vide, disons U , inclus dans le complémentaire de $Ce(C)$.
- ii) Comme \mathcal{E} est fini (voir la remarque (10.23)), si l'on note par F la réunion de toutes les droites $(q_1 q_2)$ avec $q_1 \neq q_2 \in \mathcal{E}$, alors F sera un fermé de dimension 1. L'ensemble $U' := U \setminus F$ est donc un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , et chacun de ses points vérifie la propriété (ii) du lemme (10.24).
- iii) Par le fait (10.25), appliqué à chacune des composantes irréductibles de C , si l'on note par F' l'ensemble de toutes les droites passant par chacun des points de \mathcal{E} qui sont tangentes à C , alors F' sera aussi un fermé de dimension 1 de \mathbb{R}^2 . Il suffit donc de poser $U_C := U' \setminus F'$ et la propriété (iii) du lemme (10.24) suit naturellement.

Fixons, pour toute la suite, un point $p \in U_C$, qu'on appellera **point de contrôle**.

La notion de forme affine a déjà été introduite dans la section §8 (voir définition (8.18)).

Définition 10.26 (FORME AFFINE (RAPPEL)). Une **forme affine** désignera également ici la classe d'équivalence d'un polynôme de degré 1 (disons, $a \cdot x + b \cdot y + c \in \mathbb{R}[x, y]^*$) modulo les sommes de carrés de $\mathbb{R}(x, y)^*$.

Le lemme (10.24) justifie les notations suivantes :

NOTATIONS 10.27 (DÉFINITION DE \mathcal{E}_p , $\overline{\Sigma}$ ET \mathcal{E}').

1. Si $\mathcal{C}^1(p)$ désigne le cercle unitaire (de rayon 1) centré en p , alors pour chaque point $q \in \mathcal{E}$, on note par p_q le point d'intersection de la demi-droite $[pq)$ avec $\mathcal{C}^1(p)$.
2. Pour tout point $q \in \mathcal{E}$, on note par d_q la forme affine associée à la droite (pq) .
3. On associe à \mathcal{E} l'ensemble \mathcal{E}_p , constitué des points p_q , ainsi que l'ensemble $\overline{\Sigma}$ constitué des formes d_q , quand q parcourt \mathcal{E} . Il est clair que $\text{card}(\mathcal{E}) = \text{card}(\mathcal{E}_p)$.
4. Pour tout $q \in \mathcal{E}$, on note l'ensemble $((pq) \cap C) \setminus \{q\}$ par $E(q)$.
5. Enfin, \mathcal{E}' désignera la réunion des $E(q)$, lorsque q parcourt \mathcal{E} .
Il est clair, par définition des ensembles \mathcal{E} et \mathcal{E}' , que $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}' = \emptyset$.

Voici deux conséquences du lemme (10.24).

54. Voir [Ell] pour plus de détails (définition, caractérisation ...) des points d'inflexion des courbes algébriques planes et du Hessien.

Corollaire 10.28. *Pour tout point $q \in \mathcal{E}$, il existe une unique composante connexe $C_q \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$ contenant l'ensemble $\{q\} \cup E(q)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que C_q est la composante connexe de \mathcal{C} contenant q , et soit $q' \in E(q)$, tel que $q' \neq q$ appartenant à une autre composante connexe $C_{q'} \neq C_q$ de \mathcal{C} . Le point p appartiendrait donc à la droite (qq') , qui est à son tour incluse dans le cône généralisé $C(C_q, C_{q'}) \subset Ce(\mathcal{C})$; p appartiendrait donc à $Ce(\mathcal{C})$, ce qui contredit la définition de p .

Corollaire 10.29. *Pour tous points distincts $q \neq q' \in \mathcal{E}$, on a $E(q) \cap E(q') = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Soient q et q' deux points distincts de \mathcal{E} . Supposons par l'absurde que $E(q) \cap E(q') \neq \emptyset$ et soit $q_0 \in E(q) \cap E(q')$. Alors q et q' appartiendraient à la même droite (pq_0) , ce qui signifie que l'ensemble $(pq) \cap \mathcal{E}$ contient plus d'un élément, au moins q et q' , ce qui est interdit par la condition (ii) du lemme (10.24).

10.4.3 Ordre cyclique, arcs d'interception et composantes de \mathcal{C}

A - Orientation et ordre cyclique

REMARQUE 10.30 (CHOIX D'UNE ORIENTATION SUR LE CERCLE $\mathcal{C}^1(p)$).

Choisissons, pour toute la suite, une orientation sur $\mathcal{C}^1(p)$ (orientation trigonométrique par exemple). Celle-ci donnera lieu à un ordre cyclique sur $\mathcal{C}^1(p)$, défini comme suit :

Définition 10.31 (ORDRE CYCLIQUE). On définit sur $\mathcal{C}^1(p)$ une relation ternaire de la façon suivante :

1. Pour tous points distincts a, b et c de $\mathcal{C}^1(p)$, on dit que le triplet (a, b, c) respecte l'**ordre cyclique** (associé à l'orientation choisie) et on écrit $a < b < c$, si, et seulement si, b appartient à l'**arc direct** de $\mathcal{C}^1(p)$ délimité par les points a et c respectivement.
2. Cet ordre cyclique est **complet** (voir [Meg]), i.e., **total**, dans le sens suivant :

$$\forall a, b, c \in \mathcal{C}^1(p) ; a < b < c \iff b < c < a \iff c < a < b.$$

B - Arcs et bi-arcs d'interception

NOTATIONS 10.32 (ARCS ET BI-ARCS D'INTERCEPTION DES COMPOSANTES DE \mathcal{C}).

A chaque composante connexe $C \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$, on associe l'arc de $\mathcal{C}^1(p)$ d'interception de C , qu'on note par \mathcal{A}_C . On note également par $\overline{\mathcal{A}}_C$ le symétrique de \mathcal{A}_C par rapport au point de contrôle p et par \mathcal{BA}_C le bi-arc d'interception de C , i.e., $\mathcal{BA}_C = \mathcal{A}_C \cup \overline{\mathcal{A}}_C$ (voir (9.6)).

Lemme 10.33 (DISJONCTION DES BI-ARCS D'INTERCEPTION). *Les bi-arcs d'interception \mathcal{BA}_C , quand C parcourt $\text{CoCo}(\mathcal{C})$ sont deux-à-deux disjoints, en particulier, les arcs d'interception \mathcal{A}_C sont aussi deux-à-deux disjoints.*

DÉMONSTRATION. La courbe \mathcal{C} étant composée d'au moins deux composantes connexes, on se donne deux telles composantes $C \neq C' \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$ et on suppose, par l'absurde, que $\mathcal{BA}_C \cap \mathcal{BA}_{C'} \neq \emptyset$. Alors il existerait trois points $p_0 \in \mathcal{BA}_C \cap \mathcal{BA}_{C'}$, $q \in C$ et $q' \in C'$ tels que :

$$p_0 \in (pq) \cap \mathcal{C}^1(p) \quad \text{et} \quad p_0 \in (pq') \cap \mathcal{C}^1(p').$$

Par conséquent, les points p, p_0, q et q' sont alignés (et distincts), et donc $p \in (qq') \subset C(C, C') \subset Ce(\mathcal{C})$, ce qui contredit la définition de p (voir lemme (10.24)).

C - Ordre cyclique sur les arcs et composantes

REMARQUE 10.34.

1. Si l'on considère la collection $\text{Arcs}(\mathcal{C})$, de tous les arcs \mathcal{A}_C d'interception des composantes $C \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$ et leurs symétriques $\overline{\mathcal{A}}_C$, par rapport au point de contrôle p lorsque C parcourt $\text{CoCo}(\mathcal{C})$, et en tenant compte du lemme (10.33), alors par l'orientation choisie sur $\mathcal{C}^1(p)$ l'ordre cyclique sur $\mathcal{C}^1(p)$ induit un ordre cyclique sur $\text{Arcs}(\mathcal{C})$, ce qui donne lieu à une notion d'**arcs consécutifs**, en particulier aux notions de **prédécesseur immédiat** et de **successeur immédiat** d'un arc appartenant à $\text{Arcs}(\mathcal{C})$.
2. Maintenant, si l'on ne considère que la collection des arcs d'interception \mathcal{A}_C , alors on également une notion de **composantes connexes consécutives** de \mathcal{C} , induite par la projection centrale unitaire. On peut ainsi ordonner cycliquement⁵⁵ l'ensemble $\text{CoCo}(\mathcal{C})$, en choisissant une première et dernière composante de référence, comme suit :

$$C_1 < C_2 < \cdots < C_{\text{card}(\text{CoCo}(\mathcal{C})) - 1} < C_{\text{card}(\text{CoCo}(\mathcal{C}))} < C_{\text{card}(\text{CoCo}(\mathcal{C})) + 1} := C_1.$$

♦♦ Examen des éléments de $\text{CoCo}_2(\mathcal{C})$

Revenons maintenant au deuxième type de composantes connexes de \mathcal{C} , à savoir les éléments de $\text{CoCo}_2(\mathcal{C})$ (voir remarques (10.20) et (10.23)).

Lemme 10.35 (POINTS TÉMOINS DES ÉLÉMENTS DE $\text{CoCo}_2(\mathcal{C})$). *Sur chaque composante $C \in \text{CoCo}_2(\mathcal{C})$, il existe un point q_C vérifiant les conditions suivantes :*

- i) $\forall \pi' \in \Sigma'$, $\pi'(q_C) \neq 0$, de plus, le signe global⁵⁶ de π' sur C est le même qu'en q_C .
- ii) La droite (pq_C) coupe transversalement C en chaque point de l'intersection $C \cap (pq_C)$.

DÉMONSTRATION.

- i) Soient $\pi' \in \Sigma'$, $C \in \text{CoCo}_2(\mathcal{C})$ et $\pi \in \Sigma$ tels que $C \subset \mathcal{C}_\pi$. Les polynômes π et π' étant irréductibles et non équivalents modulo les constantes, alors les courbes qu'ils définissent, \mathcal{C}_π et $\mathcal{C}_{\pi'}$, respectivement, se coupent en un nombre fini de points (théorème de Bézout). Faisons varier π' et notons par F la réunion des intersections $\mathcal{C}_\pi \cap \mathcal{C}_{\pi'}$. Alors tous les points de $C \setminus F$ vérifient la condition (i).
- ii) Par ailleurs, les tangentes à C passant par p sont en nombre fini (voir lemme (10.24)), et si l'on note par F' l'ensemble des points d'intersection de C avec ces tangentes, alors les points de $C \setminus F'$ vérifient, tous, la condition (ii). Il suffit maintenant de choisir le point q_C dans $C \setminus (F \cup F')$.

Définition 10.36. Pour toute composante connexe $C \in \text{CoCo}_2(\mathcal{C})$, on note par q_C un point **témoin** de C (le choix est fait arbitrairement).

NOTATIONS 10.37 (DÉFINITION DE $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{E}}_p$, Σ^* ET \mathcal{E}_p^*).

1. Pour toute composante $C \in \text{CoCo}_2(\mathcal{C})$, on note par p_{q_C} le point d'intersection de la demi-droite $[pq_C)$ avec $\mathcal{C}^1(p)$.
2. On note également par $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{E}}_p$ les ensembles respectifs des points q_C et p_{q_C} quand C parcourt $\text{CoCo}_2(\mathcal{C})$.
3. Soient $\mathcal{A} < \mathcal{A}' \in \text{Arcs}(\mathcal{C})$, deux arcs consécutifs sur $\mathcal{C}^1(p)$, pris parmi les arcs d'interception des composantes connexes de \mathcal{C} et leurs symétriques par rapport à p . Par disjonction de \mathcal{A} et \mathcal{A}' (voir lemme (10.33)), il existe un point $p_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}$ appartenant à $\mathcal{C}^1(p)$, compris

55. L'indexation cyclique est faite par l'ensemble $\mathbb{Z}/(\text{card}(\text{CoCo}(\mathcal{C}))) \cdot \mathbb{Z}$.

56. On appelle **signe global** de π' , le signe en les points où il ne s'annule pas.

entre⁵⁷ \mathcal{A} et \mathcal{A}' (suivant l'ordre cyclique **large**⁵⁸).

On associe à un tel point $p_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ la forme affine $d_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ séparant les arcs \mathcal{A} et \mathcal{A}' et ayant comme zéros les points de la droite $(pp_{\mathcal{A},\mathcal{A}'})$. Cette forme ne change de signe sur aucun arc de $\text{Arcs}(\mathcal{C})$, mais elle peut s'annuler sur l'une de ses deux extrémités.

4. Notons enfin par Σ^* l'ensemble de toutes les formes $d_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ et par \mathcal{E}_p^* celui des points $p_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$, quand $(\mathcal{A},\mathcal{A}')$ parcourt l'ensemble des couples consécutifs d'éléments (arcs) de $\text{Arcs}(\mathcal{C})$.
5. Dans le cas où \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont des arcs consécutifs d'interception de deux composantes connexes consécutives, C_i et C_{i+1} , respectivement, on préférera utiliser les notations $p_{C_i,i+1}$ et $d_{C_i,i+1}$ au lieu de $p_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ et $d_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ (voir lemme (10.39) pour une application).

REMARQUES 10.38.

1. Les ensembles \mathcal{E}_p , $\overline{\mathcal{E}}_p$ et \mathcal{E}_p^* sont deux-à-deux disjoints, et en particulier, comme :

$$\text{card}(\mathcal{E}) = \text{card}(\mathcal{E}_p) \quad \text{et} \quad \text{card}(\overline{\mathcal{E}}) = \text{card}(\overline{\mathcal{E}}_p)$$

il en résulte que :

$$\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}) = \text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p)$$

2. Comme c'est le cas pour les arcs, on a également une notion de **points consécutifs** sur chacune des réunions $\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$. On convient donc d'indexer par $\mathbb{Z}/(\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})) \cdot \mathbb{Z}$ et d'ordonner cycliquement ces ensembles comme suit :

$$q_1 < q_2 < \dots < q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})-1} < q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})} < q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})+1} := q_1 ;$$

$$p_{q_1} < p_{q_2} < \dots < p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})-1}} < p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})}} < p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})+1}} := p_{q_1}.$$

10.4.4 Points, droites et formes d'ajustement

Voici une autre conséquence du choix du point de contrôle p .

Lemme 10.39 (POINTS, DROITES ET FORMES D'AJUSTEMENT). *D'après la remarque (10.16)⁵⁹ il est clair que $\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}) \geq 2$. Soient $q_i < q_{i+1}$ deux points consécutifs de $\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$ et $p_{q_i} < p_{q_{i+1}}$ les points associés de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$. Alors il existe un point $p_{q_i,i+1}$ de $\mathcal{C}^1(p)$, compris entre p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$ (pour l'ordre cyclique choisi), tel que :*

- i) ★ Si q_i et q_{i+1} sont sur une même⁶⁰ composante connexe, disons $C \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$, alors $(pp_{q_i,i+1})$ intersecte cette même composante connexe, C , transversalement en tout point.
★★ Sous cette hypothèse, le symétrique de l'arc direct délimité par q_i et q_{i+1} ne contient aucun point de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$.
- ii) ★ Si q_i et q_{i+1} sont sur deux composantes connexes distinctes (consécutives), alors $(pp_{q_i,i+1})$ n'intersecte transversalement aucune composante connexe de \mathcal{C} .
★★ Dans ce cas, le symétrique de l'arc délimité par q_i et q_{i+1} peut contenir des points de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$.

On note par $d_{q_i,i+1}$ la forme affine (modulo les constantes non nulles) définissant la droite $(pp_{q_i,i+1})$ et on appelle, respectivement, le point $p_{q_i,i+1}$, la droite $(pp_{q_i,i+1})$ et la forme $d_{q_i,i+1}$, **points, droites et formes affines d'ajustement**.

57. Ce qui signifie que la forme affine $d_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$, définie ci-après, sépare ces deux arcs.

58. Cela signifie que : $(\forall q \in \mathcal{A}, \forall q' \in \mathcal{A}' ; q \leq p_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} < q')$ ou $(\forall q \in \mathcal{A}, \forall q' \in \mathcal{A}' , q < p_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} \leq q')$, i.e., $p_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ appartient à, au plus, une des adhérences $\text{adh}(\mathcal{A})$ ou $\text{adh}(\mathcal{A}')$.

59. Dans le cas où $\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}) \leq 1$, on a également $\text{card}(\text{CoCo}(\mathcal{C})) \leq 1$. Ce cas est exclu par la condition (i) de (10.15).

60. Dans ce cas, $q_i, q_{i+1} \in \mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION.

- i) ★★ On se donne une composante connexe $C \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$, telle que $q_i, q_{i+1} \in C$ et on note par \mathcal{A}_C l'arc d'interception de C . L'arc ouvert direct \mathcal{A} , délimité par q_i et q_{i+1} , est un sous-ensemble connexe de \mathcal{A}_C . On note par $\overline{\mathcal{A}}_C$ et $\overline{\mathcal{A}}$ les symétriques respectifs des arcs de \mathcal{A}_C et \mathcal{A} , par rapport à p . Si $\overline{\mathcal{A}}$ contenait un point $p_q \in \mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$, où $q \in \mathcal{C}$, alors la droite $(pq) := (pp_q)$ intersecterait l'arc \mathcal{A} , et donc la composante C , et comme q est un point de \mathcal{C} qui n'est pas sur C , alors il serait sur une autre composante connexe $C' \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$; cela forcerait le point p à appartenir au cône généralisé $C(C, C')$, ce qui est interdit par le choix de p .
- ★ Comme les tangentes à \mathcal{C} passant par p sont en nombre fini, alors il n'y a qu'un nombre fini d'entre-elles qui coupent \mathcal{A} . Si l'on note par F l'ensemble des points d'intersection de \mathcal{A} avec ces tangentes, alors par ouverture de \mathcal{A} (en particulier \mathcal{A} est infini), l'ensemble $\mathcal{A} \setminus F$ est infini. Il suffit donc de choisir le point $p_{q_{i,i+1}}$ dans $\mathcal{A} \setminus F$.
- ii) ★ Si maintenant q_i et q_{i+1} appartiennent à deux composantes distinctes de \mathcal{C} , alors par la caractérisation alternative du cône généralisé (proposition (9.19)), et par le choix de p , il existe une droite passant par p et séparant ces deux composantes (voir notations (9.17)), et par continuité (connexité) de $\mathcal{C}^1(p)$, cette droite coupe ce dernier en un point $p_{q_{i,i+1}}$ compris entre p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$. En d'autres termes, si $C_j < C_{j+1}$, où $j \in \mathbb{Z}/(\text{card}(\text{CoCo}(\mathcal{C}))) \cdot \mathbb{Z}$, sont les composantes connexes consécutives de \mathcal{C} contenant les points q_i et q_{i+1} respectivement (voir lemme (10.33) et notations (10.37)), alors il suffit de choisir :

$$p_{q_{i,i+1}} = p_{C_{j,j+1}} \in \mathcal{E}_p^* \quad \text{et} \quad d_{q_{i,i+1}} = d_{C_{j,j+1}} \in \Sigma^*.$$

★★ En effet, deux arcs d'interception de deux composantes consécutives C_j et C_{j+1} peuvent contenir le symétrique d'un arc d'interception $\mathcal{A}_{C'}$ d'une troisième composante connexe C' de \mathcal{C} . Si tel est le cas, alors le symétrique de l'arc ouvert direct \mathcal{A} , délimité par q_i et q_{i+1} , contiendrait l'arc d'interception de C' , et contiendrait donc au moins un point de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$. Dans le cas contraire, le symétrique $\overline{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} ne contient aucun point de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$.

NOTATIONS 10.40 (DÉFINITION DE \mathcal{E}_p'' , Σ'' ET \mathcal{E}'').

1. On note par \mathcal{E}_p'' l'ensemble des points d'ajustement vérifiant la propriété (i) du lemme (10.39) et par Σ'' celui des formes affines associées. L'ensemble des points d'ajustement vérifiant la propriété (ii) de ce lemme ainsi que celui des formes affines associées sont des sous-ensembles de \mathcal{E}_p^* et Σ^* , respectivement (voir notations (10.37)).
2. A chaque point d'ajustement $p_{q_{i,i+1}} \in \mathcal{E}_p''$, on note par $E''(p_{q_{i,i+1}})$ l'ensemble des points d'intersection (transversale) de la droite $(pp_{q_{i,i+1}})$ avec la courbe \mathcal{C} , et par \mathcal{E}'' leur réunion, i.e., :

$$\mathcal{E}'' := \bigcup_{p_{q_{i,i+1}} \in \mathcal{E}_p''} E''(p_{q_{i,i+1}}).$$

REMARQUE 10.41.

1. Dans le cas où $p_{q_{i,i+1}} \in \mathcal{E}_p''$, l'intersection de $(pp_{q_{i,i+1}})$ avec \mathcal{C} étant transversale en tout point, alors $d_{q_{i,i+1}}$ change de signe en chaque point de $E''(p_{q_{i,i+1}})$.
2. Ceci n'est pas le cas si $p_{q_{i,i+1}} \in \mathcal{E}_p^*$. Dans ce cas, si $\mathcal{C} \cap (pp_{q_{i,i+1}}) \neq \emptyset$, alors $\exists C \in \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \cap (pp_{q_{i,i+1}}) \subset C$, de plus, la droite $(pp_{q_{i,i+1}})$ est tangente à \mathcal{C} en chacun des points de cette intersection. Dans ce cas de figure, la forme $d_{q_{i,i+1}}$ possède un signe constant (non nul) sur C , éventuellement nul en un nombre fini de points.

10.4.5 Construction des témoins de vérité de $\Phi(\underline{A})$ sur (X, G)

Nous allons, à partir du n -uplet $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ des témoins de $\Phi(\underline{A})$ sur (Y, H) , construire un n -uplet d'éléments de G , que nous noterons $\underline{S} := (S_1, \dots, S_n)$, pour lequel $(X, G) \models \Phi(\underline{A})$, i.e., $(X, G) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A})$. Chacune des coordonnées S_l de \underline{S} , quand l parcourt $\{1, \dots, n\}$, sera définie comme un produit $S_l := \tilde{S}_l \cdot S'_l$, de la manière suivante :

Définition des \tilde{S}_l : On pose $\tilde{S}_l := \tilde{T}_l$.

Définition des S'_l : Les polynômes irréductibles, facteurs de T_l , appartenant à Σ' , i.e., les diviseurs de T'_l , seront remplacés par des formes affines $d_q \in \overline{\Sigma}$ et/ou $d_{q_i, i+1} \in \Sigma^* \cup \Sigma''$ (formes d'ajustement définies dans le lemme (10.39)).

Voici le procédé de construction de S'_l .

Par lissité de \mathcal{C} , en chaque point $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$ sont centrées deux demi-branches (algébriques) supportées sur une composante connexe $C \in \text{CoCo}(\mathcal{C})$, disons db_q^1 et db_q^2 , et sur chacune d'elles T'_l possède un signe⁶¹ bien déterminé ; notons ces signes $sg_{db_q^1}(T'_l)$ et $sg_{db_q^2}(T'_l)$, respectivement. Il est donc clair que (voir notations (10.22)) :

$$sg_{db_q^1}(T'_l) \neq sg_{db_q^2}(T'_l) \iff q \in E(T'_l)$$

REMARQUE 10.42.

Pour tout $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$, si :

$$(\sigma_{q,1}^-, \sigma_{q,1}^+) := (\wp(db_q^{1-}), \wp(db_q^{1+})) \quad \text{et} \quad (\sigma_{q,2}^-, \sigma_{q,2}^+) := (\wp(db_q^{2-}), \wp(db_q^{2+})),$$

sont les deux couples d'ordres de $\mathbb{R}(x, y)$, i.e., éléments de X_q (voir définition (5.42) et proposition (5.49)) associés, respectivement, aux demi-branches db_q^1 et db_q^2 , alors :

$$sg_{db_q^1}(T'_l) = \sigma_{q,1}^-(T'_l) = \sigma_{q,1}^+(T'_l) \quad \text{et} \quad sg_{db_q^2}(T'_l) = \sigma_{q,2}^-(T'_l) = \sigma_{q,2}^+(T'_l)$$

Les T'_l ($l \in \{1, \dots, n\}$) sont vus comme éléments de $G := G_{\mathbb{R}(x,y)}$ et les $\sigma_{p,1}^-, \sigma_{p,1}^+, \sigma_{q,1}^-$ et $\sigma_{q,1}^+$ comme des caractères de G .

NOTATION 10.43.

Soit $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$, si l'on note par $db_{p_q}^1$ et $db_{p_q}^2$ les deux demi-branches supportées sur $\mathcal{C}^1(p)$ et centrées en p_q , images respectives de db_q^1 et db_q^2 , par la projection centrale unitaire sur $\mathcal{C}^1(p)$ (voir figure (8)), alors on leur associe, par définition, des signes dépendant de T'_l , comme suit :

$$sg_{db_{p_q}^1}(T'_l) := sg_{db_q^1}(T'_l) \quad \text{et} \quad sg_{db_{p_q}^2}(T'_l) := sg_{db_q^2}(T'_l)$$

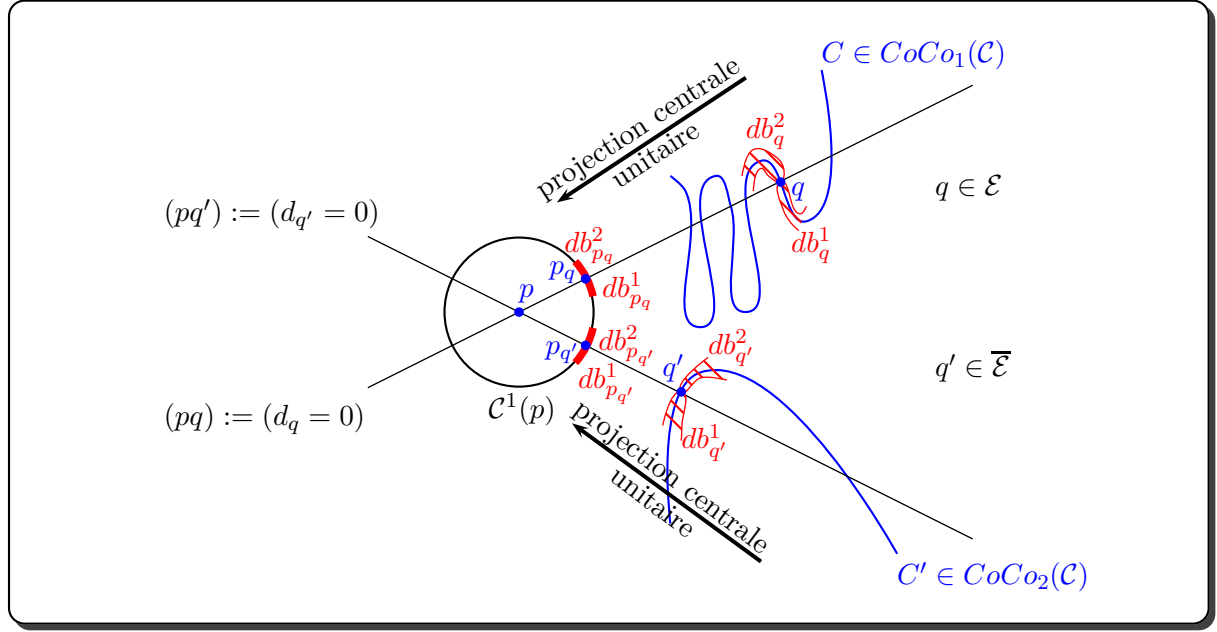
REMARQUE 10.44.

L'ensemble des demi-branches $\{db_{p_q}; q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}\}$ étant ordonné cycliquement :

$$db_{p_{q_1}}^1 < db_{p_{q_1}}^2 < db_{p_{q_2}}^1 < db_{p_{q_2}}^2 < \dots < db_{p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})}}}^1 < db_{p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})}}}^2 < db_{p_{q_1}}^1,$$

ceci induit une distribution de signes (voir notations (10.43)) sur toutes les demi-branches de $\mathcal{C}^1(p)$ centrées en les points $p_q \in \mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$, que l'on écrit de façon ordonnée :

$$sg_{db_{p_{q_1}}^1}(T'_l), \quad sg_{db_{p_{q_1}}^2}(T'_l), \quad \dots, \quad sg_{db_{p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})}}}^1}(T'_l), \quad sg_{db_{p_{q_{\text{card}(\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}})}}}^2}(T'_l)$$

FIGURE 8 – Exemple de demi-branches centrées en des points $q \in \mathcal{E}$ et $q' \in \overline{\mathcal{E}}$

NOTATIONS 10.45.

- Notons par $DB^{(2)}$ l'ensemble des couples de demi-branches consécutives ainsi ordonnées. On a ainsi une partition de $DB^{(2)}$ en trois sous-ensembles $DB_1^{(2)}$, $DB_2^{(2)}$ et $DB_3^{(2)}$, contenant respectivement les couples des types ci-dessous (voir figure (9)).

Type (1) $db_{p_q}^1 < db_{p_q}^2$, demi-branches consécutives de $C^1(p)$ centrées en un même point $p_q \in \mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$.

Type (2) $db_{p_{q_i}}^2 < db_{p_{q_{i+1}}}^1$, demi-branches consécutives de $C^1(p)$ centrées en deux points consécutifs $p_{q_i} < p_{q_{i+1}}$, où q_i et q_{i+1} sont sur une même composante connexe de \mathcal{C} .

Type (3) $db_{p_{q_i}}^2 < db_{p_{q_{i+1}}}^1$, demi-branches consécutives de $C^1(p)$ centrées en deux points consécutifs $p_{q_i} < p_{q_{i+1}}$, où q_i et q_{i+1} sont sur deux composantes connexes distinctes de \mathcal{C} .

- Deux demi-branches formant un couple de type (1) ou (2) sont situées sur l'arc, disons \mathcal{A}_C , interceptant une même composante connexe C de \mathcal{C} . Dans ce cas, l'unique forme affine séparant un tel couple de demi-branches appartient à $\overline{\Sigma}$ ou à Σ'' , selon que ces demi-branches soient centrées en un même point de \mathcal{E} ou pas. Quant à deux demi-branches formant un couple de type (3), elles peuvent être séparées par plusieurs formes pouvant appartenir à $\overline{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$.

Construction des S'_l

La construction de S'_l se fait pas-à-pas en respectant les étapes suivantes :

Etape 1) Facteurs de S'_l appartenant à $\overline{\Sigma}$: Pour les couples de demi-branches consécutives de type (1), disons $(db_{p_q}^1, db_{p_q}^2)$ avec $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$, on a :

$$sg_{db_{p_q}^1}(T'_l) \neq sg_{db_{p_q}^2}(T'_l) \iff q \in E(T'_l) \subset \mathcal{E}$$

61. Du fait que le polynôme $\pi \in \Sigma$ définissant la composante connexe C n'est pas un diviseur de T'_l .

Dans ce cas, on ajoute en facteur de S'_l la forme affine $d_q \in \bar{\Sigma}$ si, et seulement si, $q \in E(T'_l)$. Cela signifie que S'_l contient, comme *premier facteur*, le produit $\prod_{q \in E(T'_l)} d_q$.

Etape 2) Facteurs de S'_l appartenant à Σ'' : Pour les couples de demi-branches consécutives de type (2), disons $(db_{p_{q_i}}^2, db_{p_{q_{i+1}}}^1)$, où $q_i < q_{i+1} \in \mathcal{E} \cap C$ et $C \in CoCo(\mathcal{C})$, on a :

$$sg_{db_{p_{q_i}}^2}(T'_l) \neq sg_{db_{p_{q_{i+1}}}^1}(T'_l) \iff sg_{db_{q_i}^2}(T'_l) \neq sg_{db_{q_{i+1}}^1}(T'_l)$$

Dans ce cas, on ajoute en facteur de S'_l la forme affine $d_{q_i, i+1} \in \Sigma''$ si, et seulement si, $sg_{db_{q_i}^2}(T'_l) \neq sg_{db_{q_{i+1}}^1}(T'_l)$. Le *second facteur* de S'_l sera donc composé du produit de toutes les formes $d_{q_i, i+1}$, où (q_i, q_{i+1}) parcourt l'ensemble des couples consécutifs de points de \mathcal{E} , et tels que q_i et q_{i+1} appartiennent à une même composante connexe C de \mathcal{C} tels que T'_l possède des signes différents sur les demi-branches $db_{q_i}^2$ et $db_{q_{i+1}}^1$.

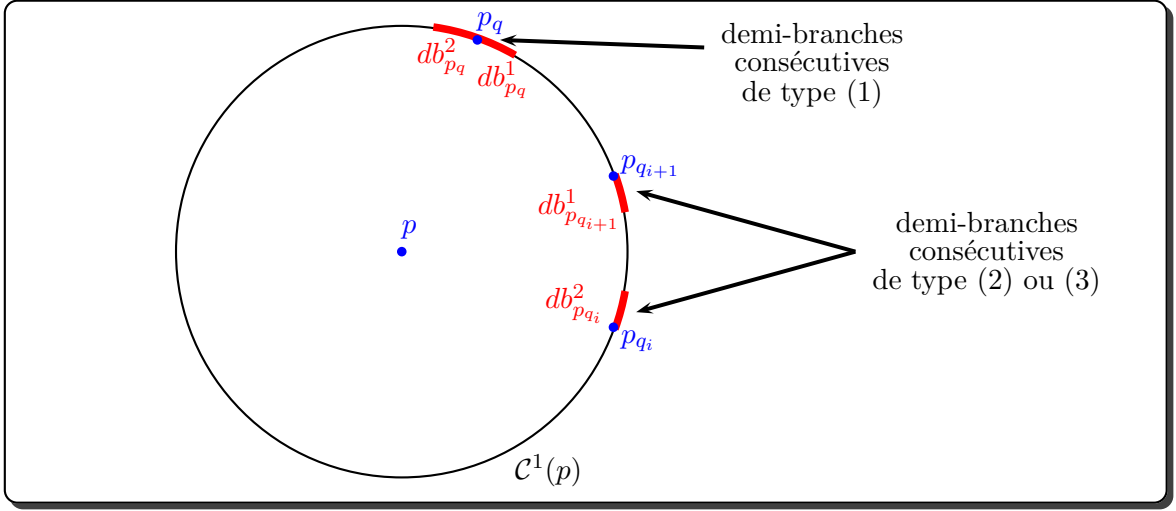


FIGURE 9 – Exemple de couples demi-branches consécutives de type (1), (2) ou (3)

Jusqu'à présent, les formes affines ajoutées à S'_l s'annulent toutes, en changeant de signe, sur des points d'intersection avec \mathcal{C} .

Les formes que nous ajouterons à l'étape qui suit (voir éléments de Σ^*), ne changent pas de signe en les points de \mathcal{C} mais entre ses composantes connexes. Contrairement aux étapes précédentes (1) et (2), où le choix des facteurs est explicite, ici on donne uniquement la parité du nombre de formes à ajouter à la composition de S'_l . Le choix de ces facteurs sera explicité dans la preuve de la proposition (10.47).

Etape 3) Facteurs de S'_l appartenant à Σ^* : Pour les couples de demi-branches consécutives de type (3), disons $(db_{p_{q_i}}^2, db_{p_{q_{i+1}}}^1)$ avec $q_i \in (\mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}}) \cap C_j$ et $q_{i+1} \in (\mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}}) \cap C_{j+1}$ où $C_j < C_{j+1} \in CoCo(\mathcal{C})$ sont deux composantes consécutives, on a les cas suivants :

1. Si $sg_{db_{p_{q_i}}^2}(T'_l) = sg_{db_{p_{q_{i+1}}}^1}(T'_l)$ et qu'il y a déjà un nombre pair de changements de signe sur l'arc direct ouvert délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, provenant des formes ajoutées aux étapes (1), (2) et éventuellement à l'étape (3), par un procédé itératif, pour des couples de demi-branches $(db_{p_{q_k}}^2, db_{p_{q_{k+1}}}^1)$ avec $1 \leq k < i$, pour séparer les demi-branches situées sur le symétrique de cet arc (celui délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$), alors on ajoute un nombre pair, voire nul, de formes affines $d_{A, A'} \in \Sigma^*$ (voir notations

- (10.37) et lemme (10.39)), séparant ou pas les points p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, de façon à ce que le nombre de changements de signe provenant de celles-ci, sur l'arc délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, soit également pair (voir proposition (10.47) ci-dessous pour l'algorithme de construction de S'_l).
2. Si $sg_{db_{p_{q_i}}^2}(T'_l) = sg_{db_{p_{q_{i+1}}}^1}(T'_l)$ et qu'il y a un nombre impair de changements de signe sur l'arc direct ouvert délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, provenant des formes ajoutées aux étapes (1), (2) et (3) (par récurrence), alors on ajoute des formes $d_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'} \in \Sigma^*$, séparant, ou pas, les points p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, de façon à ce que le nombre de changements de signe provenant de celles-ci, sur le même arc délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, soit également impair.
 3. Si $sg_{db_{p_{q_i}}^2}(T'_l) \neq sg_{db_{p_{q_{i+1}}}^1}(T'_l)$ et qu'il y a un nombre pair de changements de signe sur l'arc direct ouvert délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, provenant des formes ajoutées aux étapes précédentes, alors on ajoute des formes $d_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'} \in \Sigma^*$, séparant, ou pas, les points p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, de façon à ce que le nombre de changements de signe provenant de celles-ci, sur le même arc délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, soit impair.
 4. Si $sg_{db_{p_{q_i}}^2}(T'_l) \neq sg_{db_{p_{q_{i+1}}}^1}(T'_l)$ et qu'il y a un nombre impair de changements de signe sur l'arc direct délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, provenant des formes ajoutées précédemment, alors on ajoute des formes $d_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'} \in \Sigma^*$, séparant, ou pas, les points p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, de façon à ce que le nombre de changements de signe provenant de celles-ci, sur le même arc délimité par p_{q_i} et $p_{q_{i+1}}$, soit pair.

REMARQUE 10.46.

A l'issue de la troisième étape du programme précédent, on n'est pas en mesure de déterminer le nombre de formes que l'on doit ajouter à S'_l , seule la parité pourra l'être, et c'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 10.47. *Chaque polynôme S'_l peut être construit de façon à ce que le nombre de ses différents facteurs irréductibles (formes affines) soit pair.*

DÉMONSTRATION. La preuve se fera par récurrence sur la cardinalité de $\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$, i.e., celle de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$. Posons $s \neq s' \in \{+, -\}$ deux symboles de signes distincts.

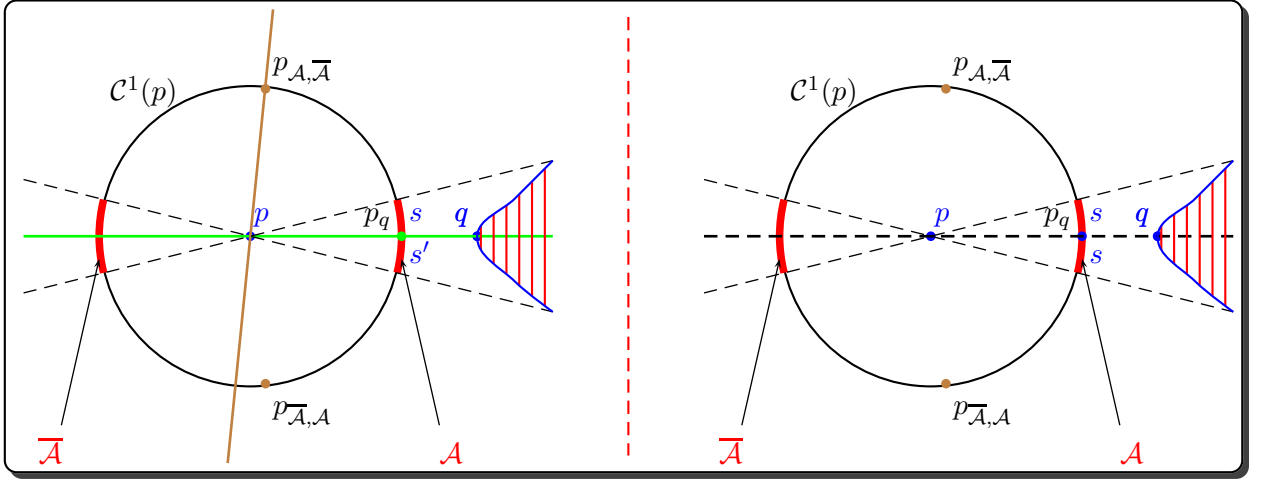
- **Cas où $card(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 1$:** En pratique, cette situation ne peut se présenter, car nous avons supposé que $card(CoCo(\mathcal{C})) \geq 2$ (voir conditions (10.15)). Le traitement de ce cas relève d'une approche purement combinatoire dans laquelle on envisage toutes les possibilités, y compris celui où $card(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 1$. Il y a deux cas (voir figure (10)) :

1. **Figure de gauche :** Dans cette situation, on a forcément $\mathcal{E} = \{q\}$ et $\overline{\mathcal{E}} = \emptyset$. Comme les signes $s' = sg_{db_{p_q}^1}(T'_l)$ et $s = sg_{db_{p_q}^2}(T'_l)$ sont distincts, alors on a ajouté, à la première étape, la forme d_q à S'_l (droite verte), et comme le nombre total de formes est impair et que le nombre total de formes devant composer S'_l doit être pair, alors on ajoute à S'_l , à l'étape (3), l'une des formes $d_{\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}}$ ou $d_{\overline{\mathcal{A}}, \mathcal{A}}$, appartenant à Σ^* . Dans l'exemple de la Figure 10, on y a ajouté la forme $d_{\mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}}$.
2. **Figure de droite :** On a égalité des signes $sg_{db_{p_q}^1}(T'_l) = sg_{db_{p_q}^2}(T'_l) = s$, donc aucune forme n'est ajoutée à l'étape (1), et donc, à l'étape (3), on n'ajoute pas de forme de Σ^* , non plus.

Conclusion 10.48. *Dans les deux situations, quitte à multiplier S'_l par ± 1 , les signes de T'_l et ceux de S'_l sur les demi-branches db_q^1 et db_q^2 sont identiques.*

REMARQUE 10.49.

Ce cas ne se présente pas en pratique, à cause du fait que le nombre minimal de composantes connexes de \mathcal{C} est au moins égal à 2, il sera utilisé comme condition initiale pour une démonstration par récurrence suivant un procédé purement combinatoire.

FIGURE 10 – Construction de S'_l : Cas où $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 1$

- **Cas où $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 2$:** Il y a en tout 6 situations, exhibant les différentes distributions de signes possibles sur les demi-branches $db_{p_{q_i}}^j$ ($i, j \in \{1, 2\}$), (voir figure (11)).
 1. **Figure en haut-gauche :** Aucune forme n'a été ajoutée dans les trois étapes. Dans ce cas, on pose $S'_l = \pm 1$, dépendant de la valeur du signe $s \in \{+, -\}$.
 2. **Figure en bas-gauche :** Une seule forme affine a été ajoutée à l'étape (1) (droite verte) mais pas à l'étape (2). A l'étape (3), on ajoute donc une seule des deux formes d_{A_2, \overline{A}_1} ou $d_{\overline{A}_2, A_1}$. Ici, on y a ajouté $d_{\overline{A}_2, A_1}$ (droite marron).
 3. **Figure en haut-centre :** Comme dans la seconde situation, une seule forme a été ajoutée à l'étape (1) (droite verte). Si q_1 et q_2 sont situés sur une même composante connexe de \mathcal{C} , alors une autre forme est ajoutée à l'étape (2), et si ces points sont sur des composantes distinctes, alors cette forme sera ajoutée à l'étape (3) (droite marron), ce qui porte le nombre total de formes composant S'_l à 2 (pair).
 4. **Figure en bas-centre :** Aucune forme n'a été ajoutée à l'étape (1), seules deux formes ont été ajoutées aux étapes (2) et (3) (droites marron). Si q_1 et q_2 sont situés sur une même composante connexe de \mathcal{C} , alors une forme est ajoutée à l'étape (2) et une autre le sera à l'étape (3), et si ces points sont sur deux composantes distinctes, alors ces formes seront ajoutées à l'étape (3).
 5. **Figure en haut-droite :** Deux formes affines ont été ajoutées à l'étape (1) uniquement (droites vertes). Ici, on n'ajoutera aucune forme aux étapes (2) et (3).
 6. **Figure en bas-droite :** Deux formes affines ont été ajoutées à l'étape (1) (droites vertes). De plus, comme dans la quatrième situation, deux autres formes sont ajoutées à S'_l aux étapes (2) et (3) (droites marron) de la manière suivante : Si q_1 et q_2 sont situés sur une même composante connexe de \mathcal{C} , alors une forme a déjà été ajoutée à l'étape (2) et une autre le sera à l'étape (3), et si ces points sont sur deux composantes distinctes, alors ces formes seront ajoutées à l'étape (3). Ceci porte le nombre total de formes composant S'_l à 4.

Conclusion 10.50. Dans tous ces cas, le nombre de facteurs de S'_l obtenus est pair.

- **Cas où $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) > 2$:** Dans ce cas on procède par récurrence sur le nombre de points de $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p)$, en supposant que pour tout ensemble composé de $N - 1$ points (avec $N > 2$) de $\mathcal{C}^1(p)$ muni d'une distribution de signes sur les demi-branches supportées sur $\mathcal{C}^1(p)$ et centrées en ses points, on peut toujours construire S'_l comportant un nombre

pair de formes affines dans sa décomposition en facteurs irréductibles.

Supposons que $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = N$ muni d'une distribution de signes sur les demi-branches centrées en ses points. Si l'on soustrait à $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$ un point q et l'on considère l'ensemble $(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) \setminus \{q\}$, muni de la même distribution de signes, on peut donc construire, par hypothèse⁶², un polynôme, disons $S'_l(q)$, composé d'un nombre pair de formes affines appartenant à $\overline{\Sigma} \cup \Sigma^* \cup \Sigma''$. Ces formes sont ajoutées pas-à-pas, en suivant les trois étapes précédentes. Notons, par ailleurs, par \mathcal{A} l'arc d'interception de la composante de \mathcal{C} contenant q , et par \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , le successeur ainsi que le prédécesseur immédiats de \mathcal{A} dans $\text{Arcs}(\mathcal{C})$. On a donc deux situations (voir figure (12)).

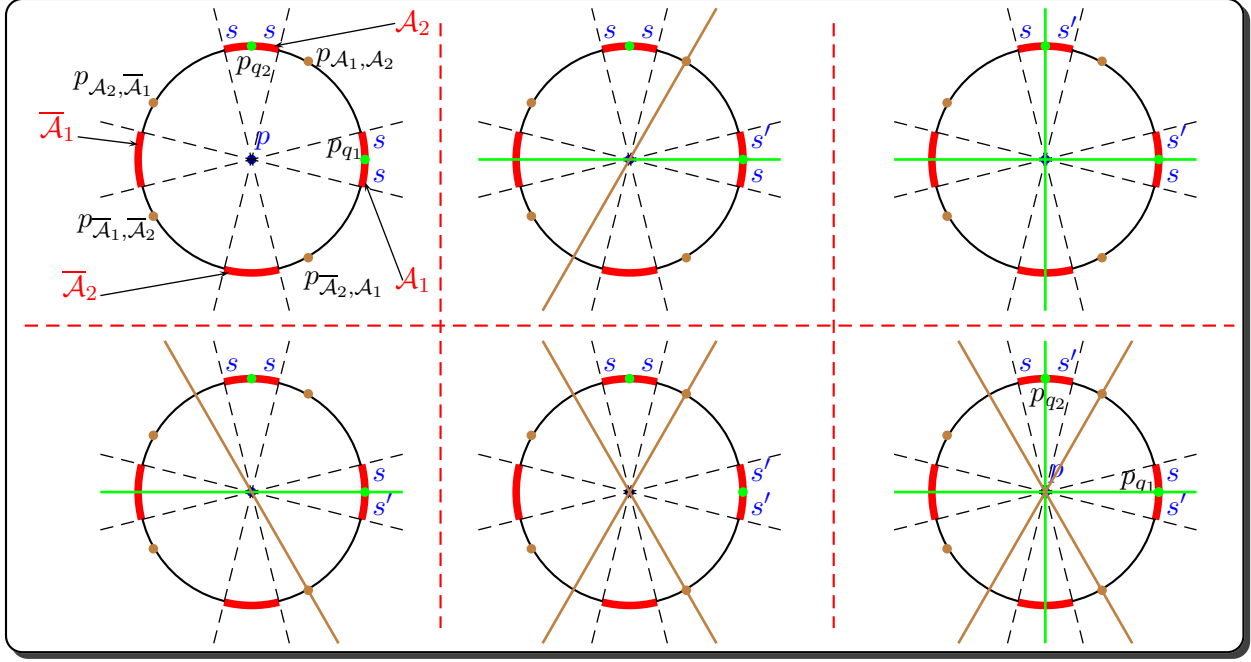


FIGURE 11 – Construction de S'_l : Cas où $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 2$

Première situation : $\exists C \in \text{CoCo}(\mathcal{C}), C \cap (\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}) = \{q\}$.

(Illustration : figure (12) - gauche).

- Si $S'_l(q)$ est une constante, i.e., ne contient aucune forme affine de $\overline{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$, alors on opère exactement comme dans le cas $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 1$, en prenant en compte le signe de $S'_l(q)$ sur $\mathcal{C}^1(p)$, donc sur le plan \mathbb{R}^2 .

- Si maintenant $S'_l(q)$ contient plus d'une forme (au moins deux), on note par d_1 et d_2 les formes ajoutées au préalable à $S'_l(q)$ et définissant les droites les plus proche à gauche (inférieurement) et à droite (supérieurement) de p_q , suivant l'orientation choisie sur le cercle $\mathcal{C}^1(p)$ ainsi que l'ordre cyclique associé (voir figure (12) - gauche). Ces droites coupent $\mathcal{C}^1(p)$, chacune en deux points. Posons p_1 et p_2 comme l'illustre la figure (12) en question. Supposons que le signe de $S'_l(q)$, sur la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus (S'_l(q) = 0)$ contenant p_q (donc q), i.e., celle délimitée par les demi-droites $[pp_1]$ et $[pp_2]$, est $s \in \{+, -\}$, et que les signes projetés sur les demi-branches supportées sur $\mathcal{C}^1(p)$ et centrées en p_q sont :

$$s_1 := sg_{db_{p_q}^1}(T'_l) \quad \text{et} \quad s_2 := sg_{db_{p_q}^2}(T'_l).$$

62. Ce procédé de construction est purement combinatoire, i.e., qu'il ne dépend que du nombre de points de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$ et des distributions des signes associées aux demi-branches supportées sur $\mathcal{C}^1(p)$ et centrées en les points de $\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$, et pas de T'_l , en d'autres termes, S'_l pourra être construit sans se donner un tel T'_l .

On étudie maintenant, cas par cas, les différentes *valeurs relatives* de ces signes :

- i) Si $s_1 \neq s_2$: On ajoute à $S'_l(q)$ la forme d_q (droite verte). Dans ce cas, on a :
 - ❶ Soit $s = s_1$: Cas dans lequel on ajoute également à $S'_l(q)$ la forme $d_{\mathcal{A}, \mathcal{A}_2}$.
 - ❷ Ou bien $s = s_2$: Cas dans lequel on ajoute à $S'_l(q)$ la forme $d_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}}$.
- ii) Sinon (*i.e.*, $s_1 = s_2$) : On a aussi deux cas :
 - ❶ Soit $s \neq s_1 = s_2$: On ajoute les formes $d_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}}$ et $d_{\mathcal{A}, \mathcal{A}_2}$ à $S'_l(q)$.
 - ❷ Ou bien $s = s_1 = s_2$: Dans ce cas, on garde $S'_l(q)$ tel quel.

On pose enfin S'_l comme étant le $S'_l(q)$ modifié (en chassant ses carrés).

Deuxième situation : $\exists C \in CoCo(\mathcal{C})$, $\{q\} \subsetneq C \cap (\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}) = C \cap \mathcal{E}$.

(Illustration : *figure (12) - droite*).

- Si $S'_l(q)$ est une constante, alors on opère de la même façon que pour le cas $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) = 1$, en prenant en compte le signe de $S'_l(q)$ sur $\mathcal{C}^1(p)$ (*i.e.*, sur le plan \mathbb{R}^2). Au final, S'_l contiendra 0 ou 2 formes affines, dépendant du fait que T'_l change de signe, ou pas, en q , *i.e.*, de l'égalité, ou pas, des signes $sg_{db_{p_q}^1}(T'_l)$ et $sg_{db_{p_q}^2}(T'_l)$ ainsi que du signe de $S'_l(q)$ sur $\mathcal{C}^1(p)$.
- Si maintenant $S'_l(q)$ contient plus d'une forme, alors comme dans la première situation, on pose les notations suivantes :

NOTATIONS 10.51.

- i) d_1 et d_2 désigneront, respectivement, les formes ajoutées à $S'_l(q)$, les plus proches de p_q à gauche (inférieurement) et à droite (supérieurement), en respectant l'orientation et l'ordre cyclique sur $\mathcal{C}^1(p)$ (voir *figure (12) - droite*).
- ii) \mathcal{A} l'arc d'interception de la composante de \mathcal{C} contenant le point q .
- iii) p_1 et p_2 sont les points d'intersection des droites d_1 et d_2 avec $\mathcal{C}^1(p)$, les plus proches de p_q à gauche et à droite, respectivement.
- iv) s_1 et s_2 les signes de la distribution en les demi-branches $db_{p_q}^1$ et $db_{p_q}^2$.
- v) s est le signe de $S'_l(q)$ en q , *i.e.*, en p_q .

On étudie, cas par cas, les différentes valeurs relatives de ces signes :

- i) Si $s_1 \neq s_2$: On ajoute à $S'_l(q)$ la forme d_q (droite verte). De plus, on a :
 - ❶ Si $s = s_1$ (*i.e.*, $s \neq s_2$) : On a deux cas :
 - a– Soit d_2 s'annule sur \mathcal{A} (*i.e.*, $d_2 \in \overline{\Sigma} \cup \Sigma''$), on note par p_2 le point d'intersection de \mathcal{A} avec la droite ($d_2 = 0$). On a deux sous-cas :
 - Si \mathcal{E}_p contient des points sur l'arc direct, semi-ouvert en p_q , délimité par p_q et p_2 , on note par p_{q_2} le plus petit de ces points, vérifiant $p_q \leq p_{q_2} \leq p_1$, et on ajoute à $S'_l(q)$ la forme $d_{q, q_2} \in \Sigma''$, séparant p_q et p_{q_2} .
 - Si un tel point n'existe pas, cela signifie donc que $d_2 \in \Sigma''$ séparerait déjà deux points consécutifs $p_{q_1}, p_{q_2} \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$ tels que $p_{q_1} < p_q < p_{q_2}$. Dans ce cas, on ajoute à $S'_l(q)$ la forme d_2 .
 - b– Ou bien d_2 ne s'annule pas sur \mathcal{A} . Cas dans lequel on a également deux sous-cas :
 - Si $d_2 \in \Sigma^*$, alors d_2 séparerait deux arcs consécutifs \mathcal{A} et \mathcal{A}_2 . On ajoute à $S'_l(q)$ la forme d_2 .
 - Si $d_2 \in \overline{\Sigma}$ (d_2 ne pouvant être un élément de Σ''), alors on note par \mathcal{A}_2 l'arc qui succède à \mathcal{A} , et on ajoute à $S'_l(q)$ la forme $d_{\mathcal{A}, \mathcal{A}_2} \in \Sigma^*$ à S'_l .
 - ❷ Si $s = s_2$ (*i.e.*, $s \neq s_1$) : On opère de façon symétrique en étudiant l'annulation, ou pas, de d_1 sur \mathcal{A} .

ii) Si $s_1 = s_2$: On a deux cas de figure :

❶ Soit $s \neq s_1 = s_2$: De façon similaire au cas $s_1 \neq s_2$, on étudie l'annulation (ou pas) des deux formes d_1 et d_2 sur \mathcal{A} . On résume ce test comme suit :

- a– Si d_1 s'annule sur un point de \mathcal{A} (i.e., $p_1 \in \mathcal{A}$) et qu'il existe des points dans \mathcal{E}_p appartenant à l'arc direct ouvert délimité par p_1 et p_q , alors on ajoute à $S'_l(q)$ la forme affine $d_{q_1,q}$ (p_{q_1} étant le plus proche parmi ces points de p_q).
- b– Si $p_1 \in \mathcal{A}$, mais aucun point de \mathcal{E}_p n'est dans l'arc ouvert délimité par p_1 et p_q , alors on ajoute à $S'_l(q)$ la forme d_1 .
- c– Si $p_1 \notin \mathcal{A}$ et $d_1 \in \Sigma^*$, alors on ajoute à $S'_l(q)$ la forme d_1 .
- d– Si $p_1 \notin \mathcal{A}$ et $d_1 \in \overline{\Sigma}$, alors on lui ajoute la forme $d_{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}}$.

Le test avec d_2 ($p_2 \in \mathcal{A}$ ou $p_2 \notin \mathcal{A}$) se fait de la même manière.

❷ Soit $s = s_1 = s_2$: On n'apporte aucune modification à $S'_l(q)$.

Comme l'est le cas e la première situation, on pose enfin S'_l comme étant le $S'_l(q)$ obtenu à l'issue de ces étapes (en chassant ses carrés).

REMARQUE 10.52.

A l'issue des différents tests de la deuxième situation, le polynôme S'_l ainsi construit, en partant de $S'_l(q)$, contiendra également un nombre pair de facteurs, car il est obtenu en ajoutant ou soustrayant un nombre pair (0 ou 2) de formes affines.

Ceci finit la démonstration de la proposition (10.47).

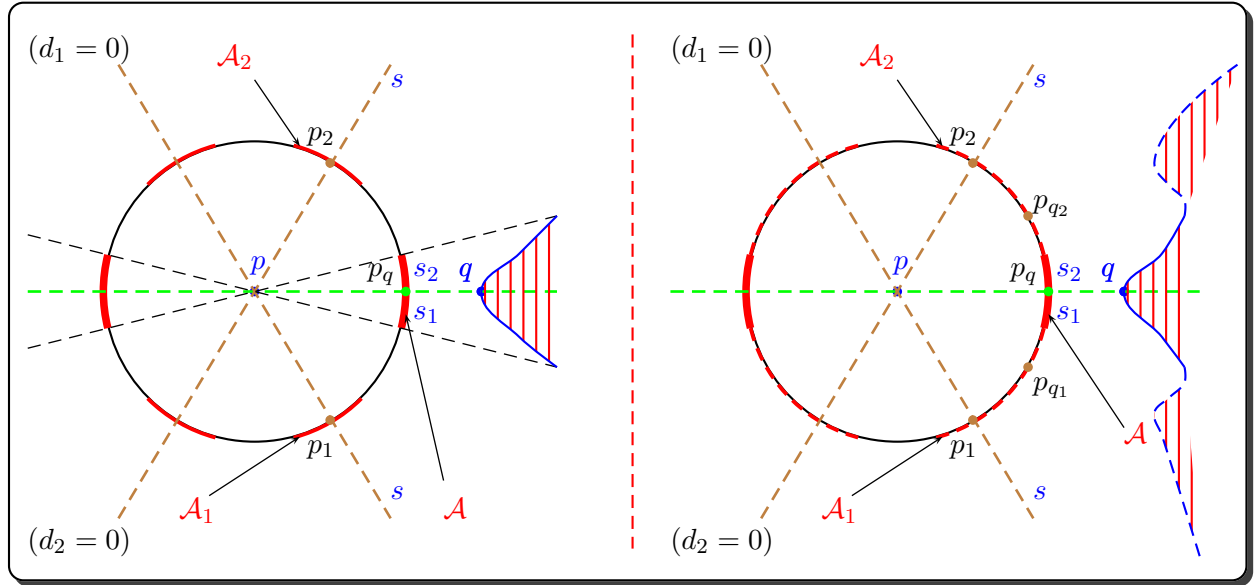


FIGURE 12 – Construction de S'_l : Cas où $\text{card}(\mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p) > 2$

La proposition suivante nous renseigne sur les signes des S'_l en chacune des demi-branches supportées sur \mathcal{C} et centrées en les points de $\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$.

Proposition 10.53. Quitte à multiplier S'_l par ± 1 , on a :

$$\forall q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}} \quad \forall j \in \{1, 2\} ; \quad sg_{db_{p_q}^j}(S'_l) = sg_{db_{p_q}^j}(T'_l) \quad \text{et} \quad sg_{db_q^j}(S'_l) = sg_{db_q^j}(T'_l)$$

DÉMONSTRATION. Par construction de S'_l et par choix des droites d'ajustement. En effet, il suffit de montrer que le signe de S'_l , en tant que polynôme, en chaque demi-branch $db_{p_q}^j$, où $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$ et $j \in \{1, 2\}$, est égal au signe défini sur cette demi-branch par *projection centrale unitaire* (voir notation (10.43)). Démontrons cela par récurrence.

INIT) Fixons-nous un point initial, disons $p_{q_1} \in \mathcal{E}_p \cup \overline{\mathcal{E}}_p$. Quitte à multiplier S'_l par ± 1 , on peut supposer que le signe de S'_l en $db_{p_{q_1}}^1$ est égal à $sg_{db_{p_{q_1}}^1}(T'_l)$. Si $sg_{db_{p_{q_1}}^1}(T'_l) \neq sg_{db_{p_{q_1}}^2}(T'_l)$, on ajoute, par construction, à S'_l la forme $d_{q_1} \in \overline{\Sigma}$, et si on a égalité, on ne l'ajoute pas. Donc le signe de S'_l en $db_{p_{q_1}}^2$ est égal à $sg_{db_{p_{q_1}}^2}(T'_l)$.

Passons maintenant à la demi-branch suivante, $db_{p_{q_2}}^1$.

Si $sg_{db_{p_{q_1}}^2}(T'_l) \neq sg_{db_{p_{q_2}}^1}(T'_l)$, alors par construction de S'_l , le nombre total de formes affines, facteurs de S'_l , séparant les points p_{q_1} et p_{q_2} est impair (voir paragraphe #10.4.5 - "**Construction des S'_l** " et proposition (10.47)), ce qui assure que les signes de S'_l en $db_{p_{q_1}}^2$ et $db_{p_{q_2}}^1$ sont distincts, et si $sg_{db_{p_{q_1}}^2}(T'_l) = sg_{db_{p_{q_2}}^1}(T'_l)$, alors le nombre de ces formes est pair, ce qui assure, par ailleurs, l'égalité des signes de S'_l en $db_{p_{q_1}}^2$ et $db_{p_{q_2}}^1$.

REC) De proche en proche, en parcourant toutes les demi-branches $db_{p_q}^j$, où $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$ et $j \in \{1, 2\}$, suivant l'ordre cyclique, en considérant à chaque fois les deux types de semi-branches consécutives (voir figure (9)) et en utilisant les mêmes arguments de l'étape **INIT)** ainsi que les différents cas de figure de la définition des S'_l , on parvient à montrer que le signe de S'_l en $db_{p_q}^j$ est égal à $sg_{db_{p_q}^j}(T'_l)$, et ces signes ne sont que ceux de T'_l en les demi-branches associées sur \mathcal{C} , db_q^j , car les formes affines d_q composant S'_l sont choisies de façon à ce que l'intersection de la droite $(pq) := (d_q = 0)$ avec la courbe \mathcal{C} soit transversale en chaque point, en particulier en q .

Ce qui finit la preuve de la proposition (10.53).

Corollaire 10.54. Soit $\varphi'(\underline{t}, \underline{A}) := 1 \in D(P(\underline{t}, \underline{A}), Q(\underline{t}, \underline{A}))$ une formule atomique de $\varphi(\underline{t}, \underline{A})$. Par le procédé de construction des polynômes S'_l , on a :

- i) Chacune des entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ est un produit d'un nombre fini d'éléments de Σ par un nombre pair (fini) de formes affines appartenant à $\overline{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$.
- ii) Les entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $P(\underline{T}, \underline{A})$ ont les mêmes signes sur chacune des quatre demi-branches signées supportées sur \mathcal{C} et centrées en chacun des points $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$, elles ont donc les mêmes valeurs en chaque élément (ordre) de X_q , $\forall q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$.
Il en est de même des entrées $Q(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{T}, \underline{A})$.

Ceci se traduit par :

Corollaire 10.55.

$$\forall q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}, \forall i \in \{1, \dots, r\}; (X_q, G_q) \models \varphi_i(\underline{S}, \underline{A})$$

Ou de façon équivalente :

$$\forall q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}; (X_q, G_q) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}) := \bigwedge_{i=1}^r \varphi_i(\underline{S}, \underline{A})$$

REMARQUE 10.56 (ASPECT COMBINATOIRE DE LA CONSTRUCTION DES S'_l).

Comme on l'a mentionné brièvement plus haut, la construction des S'_l ne dépend pas des polynômes représentant les témoins de vérité T'_l de $\exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{A})$ (sur (Y, H)), mais uniquement des points de la courbe \mathcal{C} , en lesquels ces derniers changent de signe. Cette dépendance prend en compte leurs distributions de signes en les différentes demi-branches supportées sur \mathcal{C} et centrées en ces points.

Pour mieux comprendre la mécanique de construction des S'_l , voici un exemple d'application de ce procédé, illustrant les différentes étapes de cette construction.

Exemple 10.57 (EXEMPLE D'APPLICATION). On se donne :

- une formule $pp \Phi(\underline{A}) := \exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{A})$ (conjonction finie de formules atomiques)
- des paramètres $\underline{A} = (A_1, \dots, A_m)$
- on leur associe : la courbe \mathcal{C} (vérifiant les conditions (10.15)), l'ensemble Σ ainsi que le sous-espace $(Y, H) \subset (X, G)$
- et enfin des témoins de vérité $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$ de $\varphi(\underline{t}, \underline{A})$ sur (Y, H) pour lesquels $(Y, H) \models \varphi(\underline{T}, \underline{A})$, i.e., $(Y, H) \models \Phi(\underline{A})$.

On associe à ces données les différents éléments : $p, \mathcal{C}^1(p), \mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}'', \bar{\mathcal{E}}, \bar{\Sigma}, \Sigma'', \Sigma^* \dots$

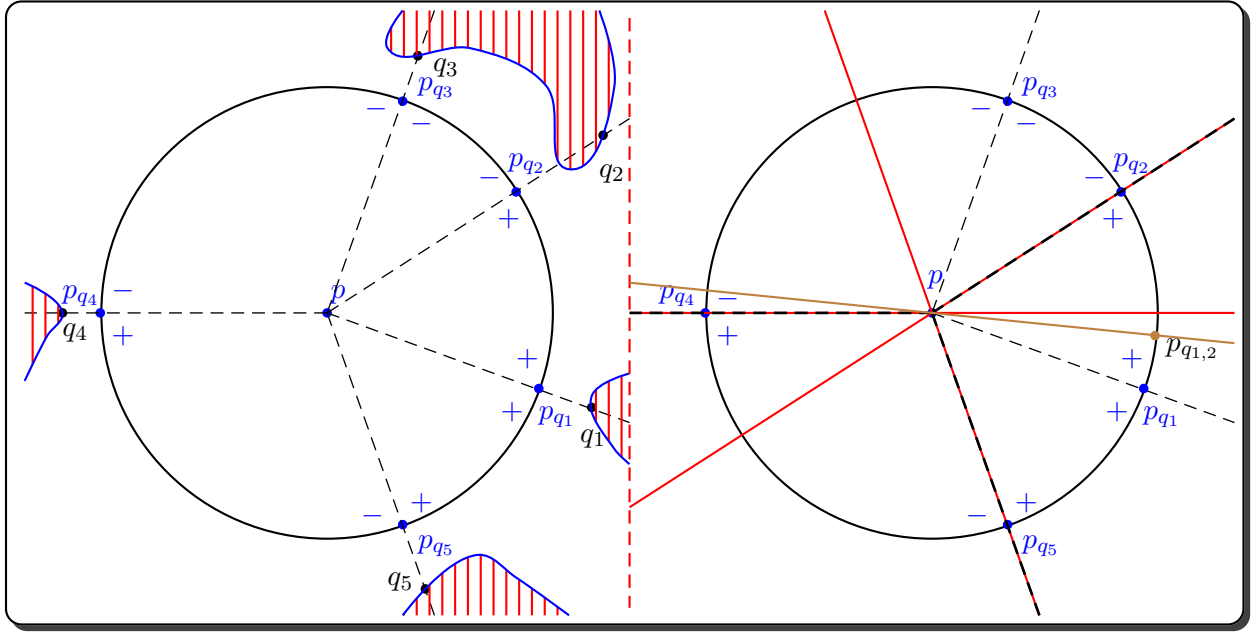


FIGURE 13 – Exemple de construction de S'_l réalisant une distribution de signes donnée

Considérons un représentant polynomial T_l (pour un témoin de vérité de la formule $\exists \underline{t} \varphi(\underline{t}, \underline{A})$ sur (Y, H)). On suppose qu'on a une distribution de signes⁶³ obtenue par *projection centrale unitaire*, comme c'est illustré sur le cercle de gauche de la Figure 13, obtenue à partir du facteur de droite T'_l de la décomposition du témoin $T_l := \bar{T}_l \cdot T'_l$.

Le polynôme S'_l sera donc construit de la façon suivante (on distinguera les 3 types de demi-branches définies dans les notations (10.45)).

1. A l'étape (1) de la définition de S'_l (voir paragraphe #10.4.5 et proposition (10.47)), les couples de demi-branches du type (1) sur lesquels on a un changement de signe sont :

$$(db_{p_{q_2}}^1, db_{p_{q_2}}^2), (db_{p_{q_4}}^1, db_{p_{q_4}}^2) \text{ et } (db_{p_{q_5}}^1, db_{p_{q_5}}^2)$$

On commence par tracer les droites rouges (pq_2) , (pq_4) et (pq_5) (voir le cercle de droite de la même figure) et on ajoute ainsi les formes affines associées d_{q_2} , d_{q_4} et d_{q_5} à S'_l .

2. A l'étape (2), le seul couple de demi-branches de type (2) est :

$$(db_{p_{q_2}}^2, db_{p_{q_3}}^1)$$

⁶³ L'exemple que nous proposons ici est purement combinatoire, notre but est d'illustrer le mécanisme de fonctionnement de la méthode de construction du témoin de vérité S_l de $\Phi(\underline{A})$ sur (X, G) .

Comme les signes $sg_{db_{p_{q_2}}^2}(T'_l)$ et $sg_{db_{p_{q_3}}^1}(T'_l)$ sont identiques, alors on n'ajoute pas la forme d'ajustement $d_{q_2,3}$, *i.e.*, on ne trace pas la droite $(pp_{q_2,3})$.

3. A la dernière étape (3), les couples de demi-branches de type (3) sont :

$$(db_{p_{q_1}}^2, db_{p_{q_2}}^1), (db_{p_{q_3}}^2, db_{p_{q_4}}^1), (db_{p_{q_4}}^2, db_{p_{q_5}}^1) \text{ et } (db_{p_{q_5}}^2, db_{p_{q_1}}^1)$$

Étudions les signes en ces couples de demi-branches.

- Comme $sg_{db_{p_{q_1}}^2}(T'_l) = sg_{db_{p_{q_2}}^1}(T'_l) = +$ et qu'il y a déjà une forme séparant p_{q_1} et p_{q_2} ($d_{q_4} \in \bar{\Sigma}$), alors on ajoute la forme $d_{q_1,2} \in \Sigma^*$ à S'_l , correspondant à la droite marron $(pp_{q_1,2})$.
- Pour le couple $(db_{p_{q_3}}^2, db_{p_{q_4}}^1)$, les signes sont identiques et deux formes séparent les points p_{q_3} et p_{q_4} , donc le nombre de formes que l'on ajoute à S'_l , si nécessaire, aux étapes qui suivront, doit être pair (ici, il est nul).
- En ce qui est du couple $(db_{p_{q_4}}^2, db_{p_{q_5}}^1)$, les signes sont différents et une seule forme séparant les points p_{q_4} et p_{q_5} a été ajoutée à présent, donc le nombre de formes que l'on ajoute à S'_l , si nécessaire, doit être pair (ici, il est nul).
- Pour finir, comme $sg_{db_{p_{q_5}}^2}(T'_l) = sg_{db_{p_{q_1}}^1}(T'_l) = +$, et qu'aucune forme n'est ajoutée, alors on se contente de ne pas ajouter de formes à la composition de S'_l .

Il suffit donc de poser :

$$S'_l = +d_{q_2} \cdot d_{q_4} \cdot d_{q_5} \cdot d_{q_1,2} \quad \text{ou} \quad S'_l = -d_{q_2} \cdot d_{q_4} \cdot d_{q_5} \cdot d_{q_1,2}$$

Le polynôme S'_l , ainsi obtenu, possède les mêmes signes que T'_l en chacune des demi-branches de \mathcal{C} centrées en les points $q_1, \dots, q_5 \in \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}}$, de plus le nombre de ses facteurs irréductibles (formes affines ajoutées) est pair (égal à 4).

10.4.6 Validité de $\varphi(\underline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{A}})$ sur (X, G)

NOTATIONS 10.58 (DÉFINITION DE Π , \mathcal{C}^* ET \mathcal{B}^*).

Posons les notations suivantes ;

1. $\Pi = \Sigma \cup \bar{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$.
2. $\mathcal{C}^* = \bigcup_{\pi \in \Pi} \mathcal{C}_\pi$ et $\mathcal{B}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}^*$.

REMARQUES 10.59.

1. \mathcal{B}^* possède une partition en deux sous-ensembles :
 - (a) \mathcal{B}_1^* : L'ensemble des points appartenant aux composantes connexes **compatibles**⁶⁴ avec une demi-branche signée $db_q^{i,*}$, où $*$ $\in \{-, +\}$, $i \in \{1, 2\}$ et $q \in \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$.
 - (b) $\mathcal{B}_2^* := \mathcal{B}^* \setminus \mathcal{B}_1^*$: Celui des points appartenant aux composantes connexes qui ne sont compatibles avec aucune de ces demi-branches.
2. Les composantes connexes de \mathcal{B}^* incluses dans \mathcal{B}_2^* sont celles définies par des couples d'inégalités $(\pi * 0, \pi' *' 0)$, où $\pi, \pi' \in \bar{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$, $*, *' \in \{<, >\}$ et telles que :

$$U(\pi * 0, \pi' *' 0) \cap \mathcal{C} = \emptyset.$$

64. Vu que chaque demi-branche db_q^i , support d'une demi-branche signée $db_q^{i,*}$, est dans l'adhérence d'au moins une composante connexe C de \mathcal{B}^* , alors C est **compatible** avec $db_q^{i,*}$ (voir définition (5.31)), *i.e.*, elle appartient à l'ultrafiltre associé $\mathfrak{F}(db_q^{i,*})$ (voir proposition (5.39)).

INDICATION. Pour prouver le théorème principal (10.17), on procède en deux étapes. Pour chaque formule atomique $\varphi'(\underline{S}, \underline{A}) := 1 \in D(P(\underline{S}, \underline{A}), Q(\underline{S}, \underline{A}))$ composant $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$, on montre :

Première étape (voir théorème (10.65)) : La positivité d'au moins une des entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ ou $Q(\underline{S}, \underline{A})$ (vues comme éléments de G_q) en chaque ordre de l'éventail de 4 éléments X_q , quand q parcourt $\mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$.

Deuxième étape (voir théorème (10.79)) : La positivité d'au moins une des entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ ou $Q(\underline{S}, \underline{A})$ (vues comme polynômes de $\mathbb{R}[x, y]$) sur chaque composante (semi-algébrique) connexe de \mathcal{B}^* du complémentaire de la réunion des courbes \mathcal{C}_π , quand π parcourt $\Pi = \Sigma \cup \overline{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$.

Rappelons d'abord que, d'après la correspondance de Brumfiel (théorème (4.32)), à chaque ordre $\sigma \in X$ est associé un *unique* ultrafiltre de rang maximal $\mathfrak{F}(\sigma)$ de l'algèbre de Boole des semi-algébriques de \mathbb{R}^2 . L'ultrafiltre $\mathfrak{F}(\sigma)$ est composé des semi-algébriques $S \subset \mathbb{R}^2$ contenant le régularisé d'un ouvert basique compatible avec σ , i.e., $\exists f_1, \dots, f_n \in \sigma$ tels que $V(f_1, \dots, f_n) \subset S$ (proposition (4.40)). Réciproquement, si \mathcal{F} est un ultrafiltre, de rang maximal, de $SA(\mathbb{R}^2)$, alors il existe un *unique* ordre $\wp(\mathcal{F})$ compatible avec tous les éléments $S \in \mathcal{F}$. De plus, $\wp(\mathcal{F})$ consiste en les éléments $f \in \mathbb{R}(x, y)$ tels que $V(f) \in \mathcal{F}$ (proposition (4.38)).

Proposition 10.60 (TRANSMISSION DE LA POSITIVITÉ). Soient $\sigma \in X$ un ordre, U un ouvert semi-algébrique connexe compatible avec σ , i.e., $U \in \mathfrak{F}(\sigma)$, $f \in \mathbb{R}[x, y]^*$ un polynôme non nul et \overline{f} son image dans $G := G_{\mathbb{R}(x, y)}$ par la surjection naturelle $\mathbb{R}[x, y]^* \rightarrow G$. Supposons de plus que $(f = 0) \cap U = \emptyset$. Alors sont équivalentes les assertions :

- i) $U \subset U(f)$,
- ii) $U \subset V(f)$,
- iii) $\sigma(\overline{f}) = 1$,
- iv) $f \in \sigma$.

DÉMONSTRATION.

(i) \Rightarrow (ii) Par le fait que pour tout ouvert semi-algébrique $S \subset \mathbb{R}^2$, on a $S \subset \text{reg}(S)$. En particulier, $U(f) \subset \text{reg}(U(f)) := V(f)$, donc si $U \subset U(f)$, alors $U \subset V(f)$.

(ii) \Rightarrow (i) Comme $U \subset V(f)$, alors $U \subset (f \geq 0)$. Or, comme $(f = 0) \cap U = \emptyset$, alors $U \subset U(f)$.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Provient de la proposition (4.38) ainsi que du lemme (4.42).

(iii) \Leftrightarrow (iv) Par définition de σ en tant que caractère de G .

REMARQUE 10.61.

Soit $\varphi'(\underline{S}, \underline{A}) := 1 \in D(P(\underline{S}, \underline{A}), Q(\underline{S}, \underline{A}))$ un atome de $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$. Chacune des entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ vérifie les hypothèses de la proposition (10.60), sur chaque composante connexe de \mathcal{B}^* . Plus généralement, on a :

Corollaire 10.62 (DE LA TRANSMISSION DE LA POSITIVITÉ (10.60)). Soient $f \in \mathbb{Z}_2[\underline{S}, \underline{A}]$, \overline{f} sa classe d'équivalence dans le groupe spécial G , $db_q^{i,*}$ une demi-branche signée (avec $* \in \{-, +\}$, $i \in \{1, 2\}$ et $q \in \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$), $\sigma_q^{i,*} \in X_q$ l'ordre associé à $db_q^{i,*}$, et $C \in \mathcal{B}_1^*$ une composante connexe de \mathcal{B}^* compatible avec la demi-branche signée $db_q^{i,*}$. Alors on a équivalence entre :

- i) $C \subset U(f)$,
- ii) $C \subset V(f)$,
- iii) $\sigma_q^{i,*}(\overline{f}) = 1$,
- iv) $f \in \sigma_q^{i,*}$.

INDICATION. Il suffit de remarquer que l'élément $f \in \mathbb{Z}_2[\underline{S}, \underline{A}]$ possède un signe constant sur chaque composante connexe de \mathcal{B}^* .

Le théorème qui suit découle du corollaire du principe de transfert (voir théorème (4.36)). Une version analogue pour les coniques rationnelles consiste en les théorèmes (8.14) et (8.15).

Théorème 10.63 (REPRÉSENTATION PAR LES 2-FORMES DANS (X, G)). Soient a et b deux éléments non nuls de $\mathbb{R}[x, y]$, $g = \bar{a}$ et $h = \bar{b}$ leurs images respectives dans G . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $1 \in D_G(g, h)$,
- ii) $\forall \sigma \in X, \sigma(g) = 1$ ou $\sigma(h) = 1$,
- iii) $\forall r \in \mathbb{R}^2, a(r) \geq 0$ ou $b(r) \geq 0$.

REMARQUE 10.64.

Dans la théorie des espaces d'ordres, l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est la définition même de la notion de représentation par les 2-formes.

Pour montrer la validité de $\varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, donc, par conjonction de ces atomes, celle de $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$, sur (X, G) , on aura besoin du théorème suivant, qui complète le corollaire (10.55).

Théorème 10.65.

$$\forall q \in \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}'', (X_q, G_q) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}).$$

DÉMONSTRATION. On distinguera les trois cas :

- 1) $q \in \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}}$,
- 2) $q \in \mathcal{E}'$,
- 3) $q \in \mathcal{E}''$.

Premier cas : $q \in \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}}$ (voir (10.22) et (10.37) pour la définition de \mathcal{E} et $\bar{\mathcal{E}}$).

Ce cas est le corollaire (10.55). Pour les détails techniques, voir proposition (10.53).

Pour les cas restants, posons :

$$\varphi'(\underline{S}, \underline{A}) := 1 \in D(P(\underline{S}, \underline{A}), Q(\underline{S}, \underline{A})),$$

une formule atomique composant $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$, où $P(\underline{S}, \underline{A}), Q(\underline{S}, \underline{A}) \in \mathbb{Z}_2[\underline{S}, \underline{A}]$ sont les entrées de sa 2-forme.

Second cas : $q \in \mathcal{E}'$ (voir (10.27) pour la définition de \mathcal{E}').

Il existe donc $q_0 \in \mathcal{E}$ et $\pi \in \Sigma$, tels que $q \in E(q_0) \subset \mathcal{C}_\pi$. Notons, comme de coutume, par d_{q_0} la forme affine définissant la droite (pq_0) et par $X_q := \{\sigma_q^1, \dots, \sigma_q^4\}$ et $X_{q_0} := \{\sigma_{q_0}^1, \dots, \sigma_{q_0}^4\}$ les éventails de 4 éléments des ordres associés aux couples de demi-branches de \mathcal{C} (donc de \mathcal{C}_π) centrées, respectivement, en q et q_0 (voir figure (14)).

Lemme 10.66. Il existe un ouvert semi-algébrique non vide $U \subset \mathbb{R}^2$, contenant q et q_0 , sur lequel tout élément de $\Pi \setminus \{\pi, d_{q_0}\}$ possède un signe constant non nul.

DÉMONSTRATION. Comme π et d_{q_0} sont les seuls éléments de Π qui s'annulent en q et q_0 , alors $\forall \pi' \in \Pi \setminus \{\pi, d_{q_0}\}$, $\pi'(q) \neq 0$ et $\pi'(q_0) \neq 0$; de plus, on a $\pi'(q) \cdot \pi'(q_0) > 0$.

En effet, si $\pi'(q) \cdot \pi'(q_0) < 0$, alors π' ne pourra être un élément de $\bar{\Sigma} \cup \Sigma^* \cup \Sigma''$, car sinon il s'annulerait sur le segment $[qq_0]$, et serait donc égal à d_{q_0} . Si maintenant $\pi' \in \Sigma$, alors pour les mêmes raisons, il existerait un point $q' \in [qq_0]$ tel que $\pi'(q') = 0$, et comme $\pi' \neq \pi$, alors

la droite $(q'q_0)$ serait incluse dans le cône exclusif $Ce(\mathcal{C})$; de plus elle contiendrait le point de contrôle p , ce qui contredit la définition de ce point (voir lemme (10.24)). Ceci prouve donc l'inégalité $\pi'(q) \cdot \pi'(q_0) > 0$.

Il existe ainsi deux voisinages ouverts de q et q_0 , disons $U(q, \pi')$ et $U(q_0, \pi')$, sur lesquels π' possède le même signe constant (non nul) (par continuité de π'). Par ailleurs, comme $\Pi \setminus \{\pi, d_{q_0}\}$ est un ensemble fini, et si l'on pose U_q l'intersection de tous les $U(q, \pi')$, et U_{q_0} celle des $U(q_0, \pi')$, quand π' parcourt $\Pi \setminus \{\pi, d_{q_0}\}$, alors l'ensemble $U := U_q \cup U_{q_0}$ vérifie les conditions du lemme (10.66).

Pour la semi-algèbricité, il suffit de choisir comme ouverts $U(q, \pi')$ et $U(q_0, \pi')$ des boules (disques) ouvertes disjointes centrées, respectivement, en q et q_0 .

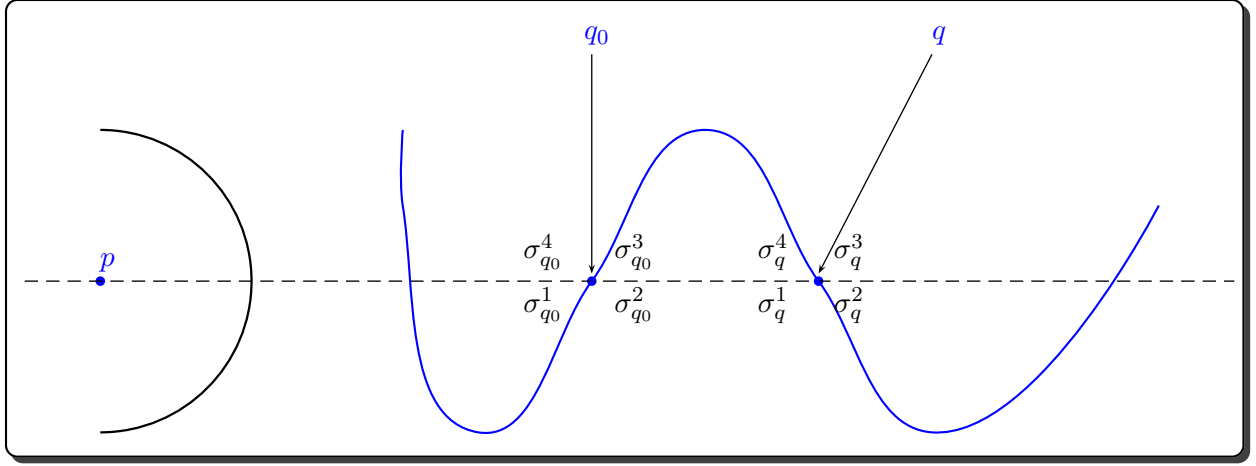


FIGURE 14 – Disposition des ordres de X_q et X_{q_0}

NOTATIONS 10.67.

Avec les notations précédentes, posons :

$$\begin{aligned} R_1 &= \{\pi > 0, d_{q_0} > 0\} \cap U, & R_2 &= \{\pi > 0, d_{q_0} < 0\} \cap U, \\ R_3 &= \{\pi < 0, d_{q_0} > 0\} \cap U, & R_4 &= \{\pi < 0, d_{q_0} < 0\} \cap U. \end{aligned}$$

Ces ensembles forment une partition de $U \setminus (\pi \cdot d_{q_0} = 0)$.

Lemme 10.68. $\forall k \in \{1, \dots, 4\}$, R_k appartient à l'ultrafiltre de rang maximal d'un unique ordre $\sigma_{q_0}^{\alpha(k)} \in X_{q_0}$ et à l'ultrafiltre de rang maximal d'un unique ordre $\sigma_q^{\beta(k)} \in X_q$, où α et β sont des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, 4\}$.

DÉMONSTRATION. Par définition, chacun des ensembles R_k ($k \in \{1, \dots, 4\}$) est un ouvert semi-algébrique composé de deux composantes connexes semi-algébriques (régulières, pour être plus précis), compatibles, chacune avec une unique demi-branch signée parmi les huit demi-branches signées supportées sur \mathcal{C} , et centrées en les points q et q_0 . Donc chacun de ces ensembles R_k est compatible avec un unique ordre $\sigma_q^{\alpha(k)} \in X_q$ et un unique ordre $\sigma_{q_0}^{\beta(k)} \in X_{q_0}$.

Proposition 10.69.

$$\forall k \in \{1, \dots, 4\} \quad \begin{cases} \sigma_q^{\alpha(k)}(P(\underline{S}, \underline{A})) = \sigma_{q_0}^{\beta(k)}(P(\underline{S}, \underline{A})) \\ \sigma_q^{\alpha(k)}(Q(\underline{S}, \underline{A})) = \sigma_{q_0}^{\beta(k)}(Q(\underline{S}, \underline{A})) \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Par le lemme (10.66), $P(\underline{S}, \underline{A})$ possède un signe constant non nul sur chaque R_k ($k \in \{1, \dots, 4\}$), et par le lemme (10.68), ce signe donne la même valeur à $P(\underline{S}, \underline{A})$ (en tant qu'élément de G) en $\sigma_q^{\alpha(k)}$ qu'en $\sigma_{q_0}^{\beta(k)}$, pour tout $k \in \{1, \dots, 4\}$, et cette valeur n'est que $\sigma_q^{\alpha(k)}(P(\underline{S}, \underline{A})) = \sigma_{q_0}^{\beta(k)}(P(\underline{S}, \underline{A}))$. La preuve pour $Q(\underline{S}, \underline{A})$ est similaire.

Corollaire 10.70. *Pour chaque point $q \in \mathcal{E}'$ (voir (**Second cas**) de la preuve du théorème (10.65)), on a :*

$$(X_q, G_q) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A}),$$

et, en particulier :

$$\forall q \in \mathcal{E}', \quad (X_q, G_q) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}).$$

DÉMONSTRATION. Comme $q_0 \in \mathcal{E}$, le corollaire (10.55) donne $(X_{q_0}, G_{q_0}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, i.e., :

$$\forall k \in \{1, \dots, 4\}, \quad (\sigma_{q_0}^k(P(\underline{S}, \underline{A})) = 1) \quad \text{OU} \quad (\sigma_{q_0}^k(Q(\underline{S}, \underline{A})) = 1).$$

Par la proposition (10.69), il en résulte que :

$$\forall k \in \{1, \dots, 4\}, \quad (\sigma_q^k(P(\underline{S}, \underline{A})) = 1) \quad \text{OU} \quad (\sigma_q^k(Q(\underline{S}, \underline{A})) = 1).$$

On en déduit finalement que $(X_q, G_q) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$.

En faisant varier l'atome $\varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, on en conclut que $(X_q, G_q) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A})$, pour tout $q \in \mathcal{E}'$.

REMARQUE 10.71.

Une autre preuve utilisant des arguments sur les valuations est possible. Il s'agit d'étudier les différentes valeurs des valuations d_q -adique et π -adique de $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ et d'expliquer les cas où $\sigma_{q_0}^k(P(\underline{S}, \underline{A})) = 1$ ou $\sigma_{q_0}^k(Q(\underline{S}, \underline{A})) = 1$ et en conclure ainsi pour les valeurs correspondantes : $\sigma_q^k(P(\underline{S}, \underline{A})) = 1$ ou $\sigma_q^k(Q(\underline{S}, \underline{A})) = 1$.

Troisième cas : $q \in \mathcal{E}''$ (voir (10.40) pour la définition de \mathcal{E}'').

Notons par C la composante connexe contenant q , et π le polynôme de Σ tel que $C \subset \mathcal{C}_\pi$. Il existe, par définition de q , deux points consécutifs, disons $q_1, q_2 \in \mathcal{E} \cap C$, et un point d'ajustement $p_{q_1,2} \in \mathcal{E}''_p$ (voir lemme (10.39)) tels que $q \in E''(p_{q_1,2}) := \{q'_1, \dots, q'_M\}$ (où $M = \text{card}(E''(p_{q_1,2}))$). On définit une relation d'ordre $<$ sur l'ensemble $E''(p_{q_1,2})$ comme suit :

$$\forall q'_i, q'_j \in E''(p_{q_1,2}), \quad q'_i < q'_j \iff \text{dist}(p, q'_i) < \text{dist}(p, q'_j),$$

où $\text{dist}(p, q'_i)$ et $\text{dist}(p, q'_j)$ désignent les distances respectives de q'_i et q'_j à p . Le fait que ces distances sont toutes différentes provient du fait que les points de $E''(p_{q_1,2}) \cup \{p\}$ sont alignés et que le point p n'est pas situé sur un segment $[q'_i, q'_j]$, $\forall q'_i \neq q'_j \in E''(p_{q_1,2})$.

Quitte à faire une permutation des indices $\{1, \dots, M\}$, et sans perte de généralité, on peut supposer que $q'_1 < \dots < q'_M$.

De la même façon, on définit une relation d'ordre sur chacun des ensembles : $E(q_1) \cup \{q_1\} := \{q'_{1,1}, \dots, q'_{1,M_1}\}$ et $E(q_2) \cup \{q_2\} := \{q'_{2,1}, \dots, q'_{2,M_2}\}$ par :

$$\forall q'_{1,i}, q'_{1,j} \in E(q_1) \cup \{q_1\}, \quad q'_{1,i} < q'_{1,j} \iff \text{dist}(p, q'_{1,i}) < \text{dist}(p, q'_{1,j}),$$

$$\forall q'_{2,i}, q'_{2,j} \in E(q_2) \cup \{q_2\}, \quad q'_{2,i} < q'_{2,j} \iff \text{dist}(p, q'_{2,i}) < \text{dist}(p, q'_{2,j}).$$

Quitte à faire des permutations des ensembles des indices $\{1, \dots, M_1\}$ et $\{1, \dots, M_2\}$, on peut supposer que $q'_{1,1} < \dots < q'_{1,M_1}$ et $q'_{2,1} < \dots < q'_{2,M_2}$.

On procède par récurrence sur les indices $i \in \{1, \dots, M\}$.

Dans une première étape, on transmet la positivité des entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ de la 2-forme associée à l'atome $\varphi'(P(\underline{S}, \underline{A}), Q(\underline{S}, \underline{A}))$, en les éléments de X_q à partir de leur positivité en les éléments de X_{q_1} et X_{q_2} ; ensuite, par récurrence, on transmet cette positivité à partir des éléments de X_q aux différents ordres des $X_{q'_i}$.

INIT) Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $q := q'_1 \in E''(p_{q_{1,2}})$ est le point le plus proche de p (parmi ceux de $E''(p_{q_{1,2}})$) et quitte à remplacer q_1 et q_2 par d'autres points de $E(q_1) \cup \{q_1\}$ et $E(q_2) \cup \{q_2\}$, respectivement, on peut supposer également que $q_1 := q'_{1,1} \in E(q_1) \cup \{q_1\}$ et $q_2 := q'_{2,1} \in E(q_2) \cup \{q_1\}$ sont les points de ces ensembles les plus proches de p (voir figure (15)).

Notons, par ailleurs, les éléments de X_q , X_{q_1} et X_{q_2} comme suit :

$$\begin{aligned} X_q &= \{\sigma_{q,1}, \sigma'_{q,1}, \sigma_{q,2}, \sigma'_{q,2}\}, \\ X_{q_1} &= \{\sigma_{q_1,1}, \sigma'_{q_1,1}, \sigma_{q_1,2}, \sigma'_{q_1,2}\}, \\ X_{q_2} &= \{\sigma_{q_2,1}, \sigma'_{q_2,1}, \sigma_{q_2,2}, \sigma'_{q_2,2}\}. \end{aligned}$$

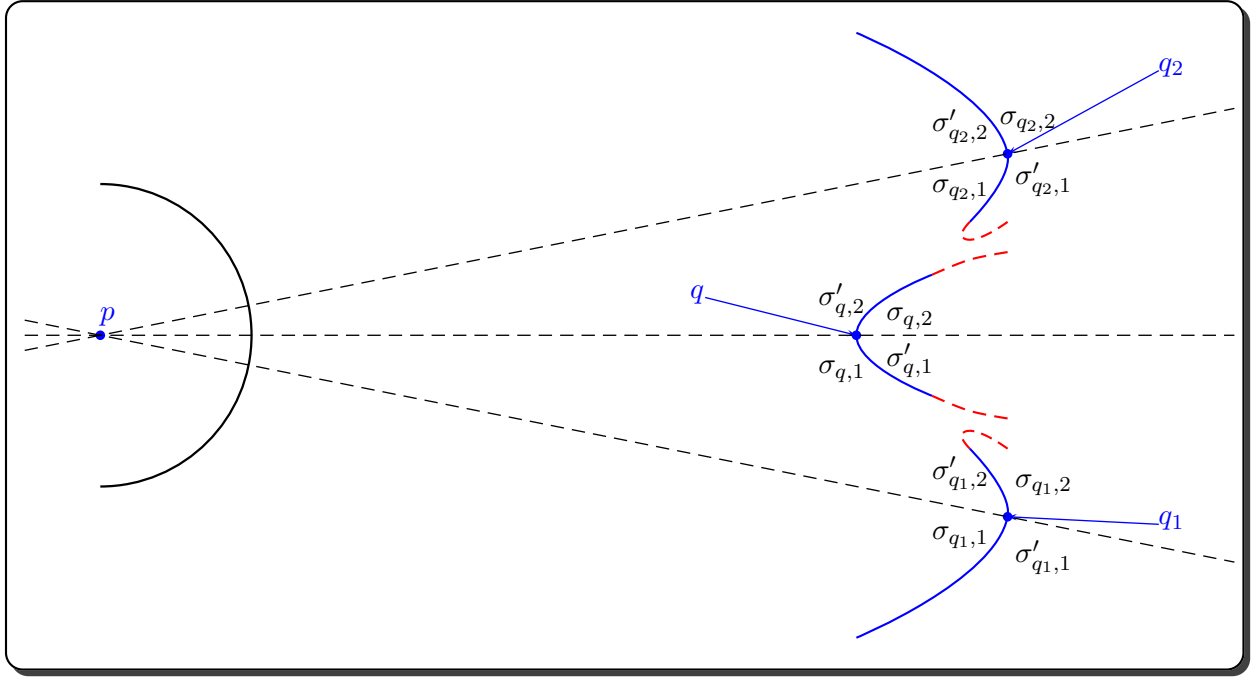


FIGURE 15 – Disposition des ordres de X_q , X_{q_1} et X_{q_2}

Lemme 10.72. Avec ces notations, et pour tout élément $\pi' \in \Pi$, vu comme élément de G , on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{q,1}(\pi') &= \sigma'_{q_1,2}(\pi') & , & & \sigma'_{q,1}(\pi') &= \sigma_{q_1,2}(\pi'), \\ \sigma_{q,2}(\pi') &= \sigma'_{q_2,1}(\pi') & \text{et} & & \sigma'_{q,2}(\pi') &= \sigma_{q_2,1}(\pi'). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de voir que, pour tout $\pi' \in \Pi$ (vu comme élément de $\mathbb{R}[x, y]$), on a (voir la Figure 15) :

$$\begin{aligned} U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma_{q,1}) &\iff U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma'_{q_1,2}), \\ U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma'_{q,1}) &\iff U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma_{q_1,2}), \\ U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma_{q,2}) &\iff U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma'_{q_2,1}), \\ U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma'_{q,2}) &\iff U(\pi') \in \mathfrak{F}(\sigma_{q_2,1}). \end{aligned}$$

En effet, soit c'est l'ouvert principal $U(\pi')$ qui est compatible avec les deux demi-branches associées à ces couples d'ordres (*i.e.*, aux couples d'ultrafiltres de rang maximal associés) en même temps, ou bien c'est $U(-\pi')$ qui l'est, d'où les égalités des signes, et le lemme suit.

Corollaire 10.73. Avec ces mêmes notations, pour tout élément $f \in \mathbb{Z}_2[\underline{S}, \underline{A}]$ (vu comme élément de G), on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{q,1}(f) &= \sigma'_{q_1,2}(f) & , & & \sigma'_{q,1}(f) &= \sigma_{q_1,2}(f), \\ \sigma_{q,2}(f) &= \sigma'_{q_2,1}(f) & \text{et} & & \sigma'_{q,2}(f) &= \sigma_{q_2,1}(f). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Tout élément $f \in \mathbb{Z}_2[\underline{S}, \underline{A}]$ est produit d'un nombre fini d'éléments $\pi' \in \Pi$, et donc son signe en chacun de ces ordres est égal au produit des signes de ses facteurs π' en chacun d'eux. En appliquant le lemme (10.72), le corollaire (10.73) suit.

Si l'on remplace maintenant f par $P(\underline{S}, \underline{A})$, ensuite par $Q(\underline{S}, \underline{A})$, on obtient :

Corollaire 10.74.

$$\begin{aligned} \sigma_{q,1}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q_1,2}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma_{q,1}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q_1,2}(Q(\underline{S}, \underline{A})), \\ \sigma'_{q,1}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q_1,2}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma'_{q,1}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q_1,2}(Q(\underline{S}, \underline{A})), \\ \sigma_{q,2}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q_2,1}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma_{q,2}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q_2,1}(Q(\underline{S}, \underline{A})), \\ \sigma'_{q,2}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q_2,1}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma'_{q,2}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q_2,1}(Q(\underline{S}, \underline{A})). \end{aligned}$$

Corollaire 10.75. Le point $q \in \mathcal{E}''$ étant fixé, comme ci-dessus, on a :

$$(X_q, G_q) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A}).$$

En faisant varier les atomes $\varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, on obtient :

$$(X_q, G_q) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}).$$

DÉMONSTRATION. On combine les faits $(X_{q_1}, G_{q_1}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$ et $(X_{q_2}, G_{q_2}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$ avec le corollaire (10.74), cela conduit à la transmission de la positivité des entrées $P(\underline{S}, \underline{A})$ et/ou $Q(\underline{S}, \underline{A})$, de la 2-forme associée à l'atome $\varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, en les ordres de X_q , à partir de leur positivité en ceux de X_{q_1} et X_{q_2} .

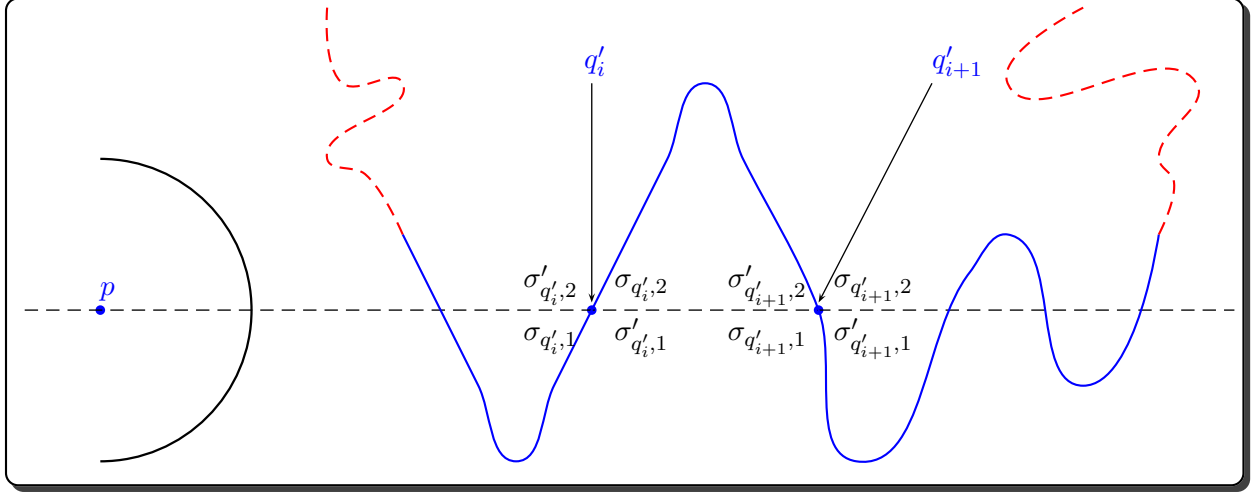
REC) Lorsque $M > 1$, par hypothèse de récurrence, on suppose que $(X_{q'_i}, G_{q'_i}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, pour un indice $i \in \{1, \dots, M-1\}$. Notons les éléments de $X_{q'_i}$ et $X_{q'_{i+1}}$ comme suit (voir figure (16)) :

$$\begin{aligned} X_{q'_i} &= \{\sigma_{q'_i,1}, \sigma'_{q'_i,1}, \sigma_{q'_i,2}, \sigma'_{q'_i,2}\}, \\ X_{q'_{i+1}} &= \{\sigma_{q'_{i+1},1}, \sigma'_{q'_{i+1},1}, \sigma_{q'_{i+1},2}, \sigma'_{q'_{i+1},2}\}. \end{aligned}$$

Cette situation est similaire au (**Second cas** : $q \in \mathcal{E}'$). En appliquant le lemme (10.66), en prenant les points q'_i et q'_{i+1} à la place de q_0 et q , respectivement, ainsi que la forme affine $d_{q_1,2}$ à la place de d_{q_0} et en gardant $\pi \in \Sigma$ comme étant le polynôme irréductible définissant la composante irréductible de \mathcal{C} contenant les points de $E(q_1) \cup \{q_1\} \cup E(q_2) \cup \{q_2\} \cup E''(p_{q_1,2})$ et, en particulier, q'_i et q'_{i+1} , on obtient un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant q'_i et q'_{i+1} , sur lequel tout élément $\pi' \in \Pi \setminus \{\pi, d_{q_{i,i+1}}\}$ possède un signe constant (non nul). De façon analogue aux notations (10.67), on définit une partition de $U \setminus (\pi \cdot d_{q_1,2} = 0)$ par des R^k ($k \in \{1, \dots, 4\}$). En appliquant maintenant le lemme (10.68) ainsi que la proposition (10.69), on obtient :

Corollaire 10.76. Avec les notations posées ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{q'_{i+1},1}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q'_i,1}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma_{q'_{i+1},1}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q'_i,1}(Q(\underline{S}, \underline{A})), \\ \sigma'_{q'_{i+1},1}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q'_i,1}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma'_{q'_{i+1},1}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q'_i,1}(Q(\underline{S}, \underline{A})), \\ \sigma_{q'_{i+1},2}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q'_i,2}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma_{q'_{i+1},2}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma'_{q'_i,2}(Q(\underline{S}, \underline{A})), \\ \sigma'_{q'_{i+1},2}(P(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q'_i,2}(P(\underline{S}, \underline{A})) & \text{et} & & \sigma'_{q'_{i+1},2}(Q(\underline{S}, \underline{A})) &= \sigma_{q'_i,2}(Q(\underline{S}, \underline{A})). \end{aligned}$$

FIGURE 16 – Disposition des ordres de $X_{q'_i}$ et $X_{q'_{i+1}}$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle de la proposition (10.69).

Corollaire 10.77.

$$(X_{q'_{i+1}}, G_{q'_{i+1}}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A}).$$

Par conjonction, on obtient :

$$(X_{q'_{i+1}}, G_{q'_{i+1}}) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}).$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse de récurrence, comme $(X_{q'_i}, G_{q'_i}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, pour tout tel atome, alors par transmission de la positivité des entrées de la 2-forme de cet atome, *i.e.*, positivité de $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$, vers les éléments de $X_{q'_{i+1}}$ à partir de leur positivité en les éléments de $X_{q'_i}$ (voir corollaire (10.76)), on en déduit que $(X_{q'_{i+1}}, G_{q'_{i+1}}) \models \varphi'(\underline{S}, \underline{A})$, et donc $(X_{q'_{i+1}}, G_{q'_{i+1}}) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A})$.

Par les étapes, **(INIT)** et **(REC)**, on en déduit que :

Corollaire 10.78.

$$\forall q \in \mathcal{E}'', (X_q, G_q) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}).$$

Ceci finit le traitement du troisième cas, et donc la preuve, du théorème (10.65).

En combinant la proposition (10.60) avec les théorèmes (10.63) et (10.65), on obtient :

Théorème 10.79 (TRANSMISSION DE LA POSITIVITÉ VERS \mathbb{R}^2).

Soit $\varphi'(\underline{S}, \underline{A}) := 1 \in D(P(\underline{S}, \underline{A}), Q(\underline{S}, \underline{A}))$ une formule atomique composant $\varphi(\underline{S}, \underline{A})$. Alors :

$$\forall r \in \mathbb{R}^2 (P(\underline{S}, \underline{A})(r) \geq 0 \quad \text{OU} \quad Q(\underline{S}, \underline{A})(r) \geq 0).$$

DÉMONSTRATION. On se donne un point quelconque r du plan réel \mathbb{R}^2 .

Compte tenu des notations (10.58) et de la remarque (10.59), on a la partition suivante de \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{R}^2 := \mathcal{C}^* \sqcup \mathcal{B}_1^* \sqcup \mathcal{B}_2^*.$$

Suivant l'appartenance de r à ces ensembles, on a trois cas de figure :

1) $r \in \mathcal{C}^*$: Donc $\exists \pi \in \Pi$ tel que $r \in \mathcal{C}_\pi$.

Il y a là deux possibilités :

- Soit $(\pi|P(\underline{S}, \underline{A}) \text{ ou } \pi|Q(\underline{S}, \underline{A}))$. Dans ce cas, on obtient $P(\underline{S}, \underline{A})(r) = 0$ ou $Q(\underline{S}, \underline{A})(r) = 0$, suivant la situation.
- Ou bien $(\pi \nmid P(\underline{S}, \underline{A}) \text{ et } \pi \nmid Q(\underline{S}, \underline{A}))$. Dans ce cas, $\exists U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert contenant r , sur lequel $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ possèdent des signes constants, et comme \mathcal{C}^* est l'adhérence de \mathcal{B}^* (dans \mathbb{R}^2), il existe alors une composante connexe (ouverte et non vide) $C \in \text{CoCo}(\mathcal{B}^*)$ telle que $U \cap C \neq \emptyset$. Choisissons un point $r' \in U \cap C$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} sg(P(\underline{S}, \underline{A})(r)) &= sg(P(\underline{S}, \underline{A})(r')), \\ sg(Q(\underline{S}, \underline{A})(r)) &= sg(Q(\underline{S}, \underline{A})(r')). \end{aligned}$$

Par conséquent, la positivité de $P(\underline{S}, \underline{A})$ et/ou $Q(\underline{S}, \underline{A})$ en r est équivalente à leur positivité en r' . On peut donc supposer que $r \in \mathcal{B}^*$.

On distinguera les deux cas, $r \in \mathcal{B}_1^*$ et $r \in \mathcal{B}_2^*$.

- 2)** $r \in \mathcal{B}_1^*$: Soit $C \in \text{CoCo}(\mathcal{B}_1^*)$ la composante connexe de \mathcal{B}^* contenant r . Il existe donc une demi-branche signée $db_{q,i}^j$, où $q \in \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}} \cup \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$, $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{+, -\}$, avec laquelle C est compatible. Soit $\sigma_{q,i}^j$ l'ordre de (X, G) associé à $db_{q,i}^j$. Par la proposition (10.60), on a :

$$\begin{aligned} P(\underline{S}, \underline{A})(r) > 0 &\iff \sigma_{q,i}^j(P(\underline{S}, \underline{A})) = 1, \\ Q(\underline{S}, \underline{A})(r) > 0 &\iff \sigma_{q,i}^j(Q(\underline{S}, \underline{A})) = 1. \end{aligned}$$

Or, par le théorème (10.65), au moins une des égalités $\sigma_{q,i}^j(P(\underline{S}, \underline{A})) = 1$ ou $\sigma_{q,i}^j(Q(\underline{S}, \underline{A})) = 1$ est vérifiée, d'où ce qu'on recherche.

- 3)** $r \in \mathcal{B}_2^*$: Soit $C \in \text{CoCo}(\mathcal{B}_2^*)$ la composante connexe de \mathcal{B}^* contenant r .

Quitte à ré-indexer les éléments de $\bar{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$ (suivant l'ordre cyclique toujours), on peut supposer que $d_1, d_2 \in \bar{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$ sont les deux formes définissant la composante C , comme ouvert basique de \mathbb{R}^2 . De plus, quitte à multiplier d_1 et d_2 par ± 1 , on peut supposer que $C = (d_1 > 0, d_2 > 0)$; donc l'ensemble $\bar{C} := (d_1 < 0, d_2 < 0)$ n'est que le symétrique de C par rapport à p , d'où l'égalité $\bar{C} \cap \mathcal{B}^* = \bar{C} \cap \mathcal{B}_1^*$, cet ensemble est une union finie de composantes connexes de \mathcal{B}_1^* .

On a donc la décomposition suivante, en composantes connexes (ouvertes) :

$$\bar{C} \cap \mathcal{B}^* = \bar{C}_1 \cup \dots \cup \bar{C}_r,$$

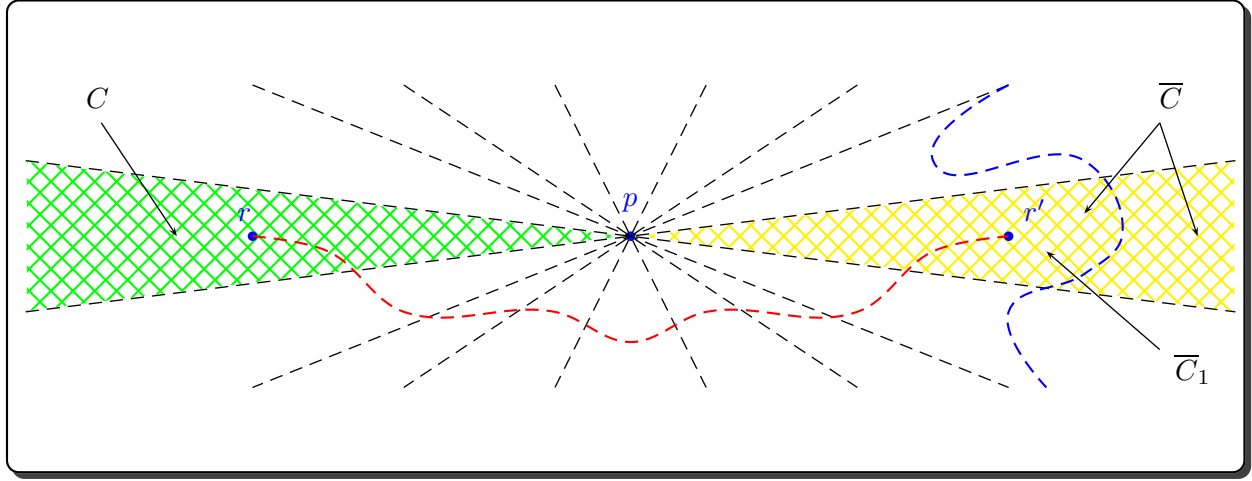
où \bar{C}_1 est la composante connexe (ouverte) de $\bar{C} \cap \mathcal{B}_1^*$ dont l'adhérence contient p . Choisissons un point arbitraire $r' \in \bar{C}_1$.

Fait 10.80. On a les égalités des signes :

$$\begin{aligned} sg(P(\underline{S}, \underline{A})(r)) &= sg(P(\underline{S}, \underline{A})(r')), \\ sg(Q(\underline{S}, \underline{A})(r)) &= sg(Q(\underline{S}, \underline{A})(r')). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Par définition, chacun des $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ est composé d'un nombre fini (pair) de formes affines appartenant à $\bar{\Sigma} \cup \Sigma'' \cup \Sigma^*$. Il existe donc un chemin continu (homéomorphisme) $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tel que $c(0) = r$, $c(1) = r'$ et que chacun des $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ s'annule en changeant de signe sur un nombre pair de points de $c([0, 1])$ (voir Figure 17). Cela signifie que $P(\underline{S}, \underline{A})$ et $Q(\underline{S}, \underline{A})$ ont le même signe en $c(0)$ et en $c(1)$, i.e., en r et en r' (respectivement), et d'après l'hypothèse, on sait que, $P(\underline{S}, \underline{A})(r') > 0$ et/ou $Q(\underline{S}, \underline{A})(r') > 0$ (voir cas **(2)** : $r \in \mathcal{B}_1^*$), on en déduit donc que $P(\underline{S}, \underline{A})(r) > 0$ et/ou $Q(\underline{S}, \underline{A})(r) > 0$.

Ce qui finit ainsi la preuve du théorème (10.79).

FIGURE 17 – Etude du cas $r \in \mathcal{B}_2^*$

Le résultat qui suit est un corollaire du théorème principal (10.17).

Corollaire 10.81. *Avec les notations de (10.2) et (10.3) (définition de \underline{A}) et du paragraphe #10.4.5 (définition de \underline{S}), si $\Phi(\underline{A})$ est vérifiée localement sur (Y, H) , alors :*

$$(X, G) \models \varphi(\underline{S}, \underline{A}),$$

ce qui donne :

$$(X, G) \models \Phi(\underline{A}).$$

10.5 Construction de familles V –universelles

10.5.1 Méthode I

Nous allons exposer, dans le présent paragraphe, une méthode de construction de familles/formules V –universelles, basée sur la donnée d’un cercle de centre P et de rayon r , et d’un nombre fini de points, sur celui-ci, qui sont deux-à-deux non symétriques par rapport à P .

NOTATIONS 10.82.

On se donne :

- n un entier positif, avec $n \geq 2$.
- r un nombre réel strictement positif.
- P un point du plan réel \mathbb{R}^2 .
- $\mathcal{C}^r(P)$ le cercle de centre P et de rayon r .
- $\mathcal{D}^r(P)$ le disque ouvert de centre P et de rayon r .
- E_P une famille de n points P_i appartenant au cercle $\mathcal{C}^r(P)$, tous distincts et non symétriques les uns aux autres par rapport à P .

A chaque point $P_i \in E_P$, on associe :

- D’une part, la droite T_{P_i} , tangente à $\mathcal{C}^r(P)$ en P_i et définie par une forme affine, disons d_{P_i} , que nous supposons, sans perte de généralité, positive en P .
- D’autre part, l’ensemble $E(P_i)$ des points de E_P les plus éloignés de P_i ($E(P_i)$ est composé d’au moins un point de E_P et d’au plus deux points).

Pour finir :

- Pour tout couple de points (P_i, Q) (où $P_i \in E_P$ et $Q \in E(P_i)$), on note par $R(P_i, Q)$ l'ensemble (ouvert) des points du plan sur laquelle d_{P_i} et d_Q sont tous les deux négatifs.
- \mathcal{R} désignera la réunion des ensembles $R(P_i, Q)$ quand P_i parcourt E_P et Q parcourt $E(P_i)$.

Soit maintenant Σ un ensemble fini de polynômes irréductibles $\pi \in \mathbb{R}[x, y]$ et \mathcal{C} la courbe des lieux des zéros des $\pi \in \Sigma$, i.e., :

$$\mathcal{C} := \bigcup_{\pi \in \Sigma} (\pi = 0) := \left(\prod_{\pi \in \Sigma} \pi = 0 \right).$$

On suppose que \mathcal{C} vérifie les conditions suivantes :

Conditions 10.83.

- (1) \mathcal{C} est lisse.
- (2) Toute composante connexe de \mathcal{C} est incluse dans une composante connexe de \mathcal{R} .
- (3) Toute composante connexe de \mathcal{R} contient au plus une composante connexe de \mathcal{C} .

REMARQUE 10.84.

1. Il y a au moins autant de composantes connexes de \mathcal{R} que de \mathcal{C} .
2. Pour chaque telle famille Σ , vérifiant les conditions (10.83), le disque ouvert $\mathcal{D}^r(p)$ est inclus dans le complémentaire du cône exclusif $Ce(\mathcal{C})$.
3. On peut ainsi choisir le point de contrôle p (voir lemme (10.24)) à l'intérieur du disque $\mathcal{D}^r(P)$.

Proposition 10.85. Σ vérifie les conditions (10.15) et, en particulier, Σ est une famille V –universelle.

INDICATION. L'élément clé de la preuve est le point (2) de la remarque (10.84). Prouver que le disque ouvert $\mathcal{D}^r(P)$ est inclus dans le complémentaire du cône exclusif $Ce(\mathcal{C})$ ne requiert que quelques arguments basiques de Géométrie euclidienne sur le plan réel \mathbb{R}^2 .

PROBLÈME OUVERT 10.86.

Nous ignorons, à présent, si la réciproque est aussi vraie, c'est-à-dire si toute famille Σ vérifiant les conditions (10.15) provient d'un procédé similaire à celui exposé ci-dessus. Il est donc intéressant d'explorer cette question.

La méthode qui suivra nous offre un autre procédé de construction de familles V –universelles pour lequel, et contrairement au précédent, le nombre de composantes connexes associées est maîtrisable à partir des données initiales.

10.5.2 Méthode II

Pour cela, nous aurons besoin d'un type très particulier d'étoiles, dont voici une définition :

Définition 10.87 (ETOILES TOTALEMENT CONCAVES). Une $2n + 1$ –**étoile totalement concave**, avec $n \in \mathbb{N}$, est un polygone (croisé) pour lequel l'angle *ouvert direct*⁶⁵ délimité par chaque couple de côtés consécutifs ne contient aucun sommet du polygone. L'entier n est appelé **rang** de l'étoile.

65. En choisissant une orientation du plan (trigonométrique par exemple).

Exemples 10.88.

1. Les étoiles de rang 0 sont les points.
2. Les étoiles de rang 1 sont les triangles.
3. Les étoiles de rang 2 sont les étoiles de dessins d'enfants qu'on appelle *étoiles à 5 branches*.
4. Les étoiles de rang supérieur ou égal à 3 ne sont pas toutes totalement concaves. Sur la figure (18) l'étoile rouge (à droite) est à 7 branches, donc de rang 3, mais pas totalement concave. Ses angles directs interceptent tous au moins un sommet de l'étoile.

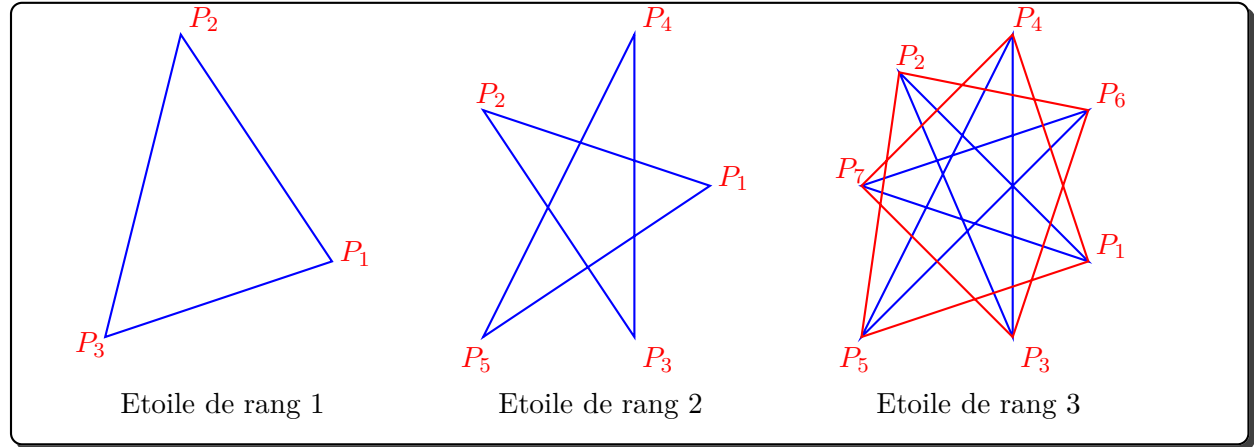


FIGURE 18 – Exemples d'étoiles totalement concaves (étoiles bleues)

REMARQUE 10.89.

Les étoiles à nombre pair de branches (supérieur ou égal à 4) sont toutes non totalement concaves (voir la figure (19) pour quelques exemples).

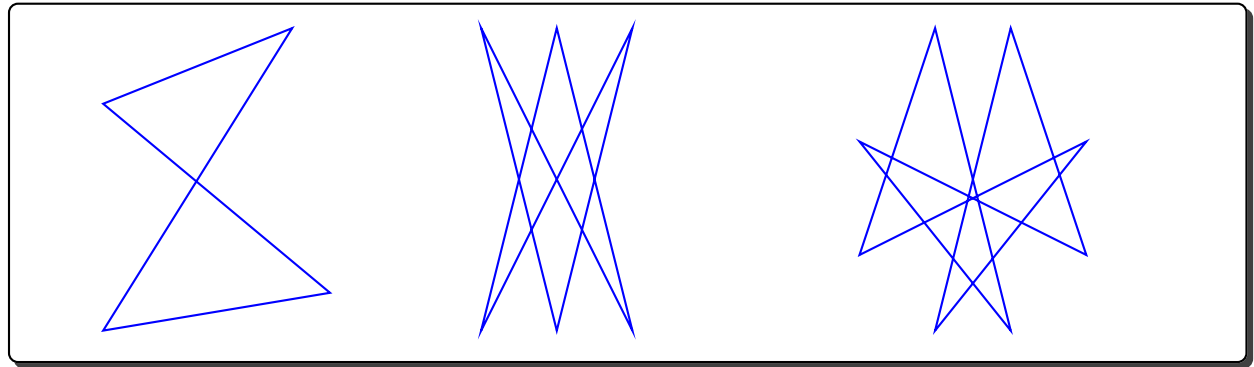


FIGURE 19 – Exemples d'étoiles à nombre pair de branches

Construction d'étoiles totalement concaves On considère une étoile \mathcal{T} ayant un nombre impair de sommets : P_1, \dots, P_{2n+1} , où n est un entier strictement positif.

Pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/(2n+1) \cdot \mathbb{Z}$, notons par $d_{i,i+1}$ un polynôme de degré 1 (une forme affine) s'annulant en les deux sommets consécutifs P_i et P_{i+1} , de \mathcal{T} .

Supposons, de plus, que ces formes vérifient les conditions suivantes :

Conditions 10.90.

(1) $\exists P \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall i \in \mathbb{Z}/(2n+1) \cdot \mathbb{Z}$, $d_{i,i+1}(P) > 0$.

Ceci se traduit par $U(d_{1,2}, \dots, d_{i,i+1}, \dots, d_{2n+1,1}) \neq \emptyset$ (comme ouvert basique).

(2) $\forall i \neq j \in \mathbb{Z}/(2n+1) \cdot \mathbb{Z}$:

$$U(-d_{i-1,i}, -d_{i,i+1}) \cap U(d_{j-1,j}, d_{j,j+1}) = \emptyset,$$

et

$$U(-d_{i-1,i}, -d_{i,i+1}) \cap U(-d_{j-1,j}, -d_{j,j+1}) = \emptyset.$$

Cette deuxième condition dit simplement qu'en les points du plan en lesquels deux formes consécutives sont négatives, deux autres formes consécutives (au moins une différente des précédentes) ne peuvent avoir le même signe non nul.

REMARQUE 10.91.

Une étoile vérifiant les conditions (10.90), est totalement concave.

Proposition 10.92. Avec les données précédentes, le cône exclusif de l'ensemble :

$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{2n+1}} U(-d_{i-1,i}, -d_{i,i+1})$ est propre.

Corollaire 10.93. Toute famille finie de polynômes irréductibles réels $\{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ vérifiant :

- i) La courbe $\mathcal{C} := \left(\prod_{k=1}^{k=r} \pi_k = 0 \right)$ est sans points singuliers (i.e., lisse).
- ii) Chaque composante connexe de \mathcal{C} est incluse dans un (unique) $U(-d_{i-1,i}, -d_{i,i+1})$.
- iii) Chacun des ouverts basiques $U(-d_{i-1,i}, -d_{i,i+1})$ contient au plus une composante connexe de \mathcal{C} .

est V -universelle.

Références

- [AAB] F. Acquistapace, C. Andradas, F. Broglia ; *Separation of Semialgebraic Sets*; Amer. Math. Soc. **12**, p. 703-728 ; 1999
- [ABR] C. Andradas, L. Bröcker, J.M. Ruiz ; *Constructible Sets in Real Geometry*; A Series of Modern Surveys in Mathematics., vol. **33**, Springer-Verlag ; 1996
- [AGR1] M.E. Alonso, J.M. Gamboa, J.M. Ruiz ; *On Orderings on Real Surfaces*; Preprint ; 1982
- [AGR2] ——— ; *Ordres sur les Surfaces Réelles*; C. R. Acad. Sc. Paris, vol. **298** - Série I, no. **1**, p. 17-19 ; 1984
- [AlRa] M.E. Alonso, M. Raimondo ; *The Computation of the Topology of a Planar Semi-Algebraic Set*; Rend. Sem. Math., Univ. Politec. Torino, vol. 46, no. **3** ; Mai 1988
- [AR] C. Andradas, J.M. Ruiz ; *Algebraic and Analytic Geometry of Fans*; Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 115, no. **553** ; Mai 1995
- [Art] E. Artin ; *The Collected Papers of Emil Artin*; edited by Serge Lang and John Tate, Addison-Wesley, Reading, Mass. ; 1965
- [AS] E. Artin, O. Schreier ; *Algebraische Konstruktion Reeller Korper*; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, no. **5**, p. 83-115 ; 1926
- [Ast1] V. Astier ; *Théorie des Modèles des Groupes Spéciaux de Longueur de Chaîne Finie*; Ph. D. Thesis ; Université PARIS VII ; 1999
- [AT] V. Astier, M. Tresselt ; *Axiomatisation of Local-Global Principle for pp Formulae in Spaces of Orderings*; Archives of Math. and Log., vol. **44** - no. **1**, p. 77-95 ; 2005
- [BCR] J. Bocklandt, M. Coste, M.-F. Roy ; *Géométrie Algébrique Réelle*; Ergeb. der Math. Grenz., vol. **12**, Springer-Verlag, Berlin ; 1987
- [BDTO] J.-P. Brasselet, J. Damon , L. D. Tráng, M. Oka ; *Singularities in Geometry and Topology*; Proc. of the Tri. Sing. Sum. Sch. and Work. ; ICTP, Trieste, Italy ; 2005
- [Bro1] L. Bröcker ; *Description of Semialgebraic Sets by Polynomials*; Summer School at CIMPA ; 1985
- [Bro2] ——— ; *On the Separation of Basic Semialgebraic Sets by Polynomials*; Manuscripta Math., vol. **60**, p. 497-508 ; 1988
- [Bru] G.W. Brumfiel ; *Partially Ordered Rings and Semi-algebraic Geometry*; London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **37**, Cambridge Univ., Press ; 1979
- [CK] C.C. Chang, H.J. Keisler ; *Model Theory*; Studies in Logic and The Foundations of Mathematics (Elsevier), Vol. **73**, Amsterdam ; 1990
- [Cra1] T. Craven ; *The Topological Space of Orderings of a Rational Function Field*; Duke. Math. J., no. **41**, p. 339-347 ; 1974
- [Cra2] ——— ; *The Boolean Space of Orderings of a Field*; Trans. Amer. Math. Soc., no. **209**, p. 225-235 ; 1975
- [Dab] J. M. D'Abreu ; *Supplément à la Traduction de "La Géométrie d'Euclide" de PEYRARD et à "La Géométrie" de LEGENDRE*; Imprimerie de Raymond Noubel (Agen) ; Juillet 1809
- [Dic] M. Dickmann ; *Anneaux de Witt Abstraits et Groupes Spéciaux*; Séminaire de Structures Algébriques Ordonnées 1991-1992 PARIS VII - CNRS, Logique, Prépublications **42**, Paris ; 1993
- [DM] M. Dickmann, F. Miraglia ; *Special Groups : Boolean-Theoretic Methods in the Theory of Quadratic Forms*; Memoirs Amer. Math. Soc., vol. **689**, Amer. Math. Soc., Providence, RI ; 2000

- [DMM] M. Dickmann, M. Marshall, F. Miraglia ; *Lattice-Ordered Reduced Special Groups* ; Ann. Pure and Appl. Logic, vol. 132, p. 27-49 ; 2005
- [Doc] Dock Sang Rim ; *Relatively Complete Fields* ; Duke Math. J., **24**, p. 197-200 ; 1957
- [EKM] R. Elmann, N. Karpenko, A. Merkurjev ; *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms* ; AMS Colloquium Publications, Vol **56** ; 2008
- [Ell] Elliot ; *Sur les Points d'Inflexion des Courbes Algébriques* ; Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, série **2**, Tome **2**, p. 216-232 ; 1878
- [EP] A. J. Engler, A. Prestel ; *Valued Fields* ; Springer-Verlag ; 2005
- [Gil] R. Gilmer ; *Extension of an Order to a Simple Transcendental Extension* ; Cont. Math., **8**, p. 113-118 ; 1981
- [GM1] P. Gładki, M. Marshall ; *The pp Conjecture for Spaces of Orderings of Rational Conics* ; J. Alg. Appl., vol. **6**, no. **2**, p. 245-257 ; 2007
- [GM2] ——— ; *The pp Conjecture for the Space of Orderings of the Field $R(x,y)$* ; Journal of Pure Applied Algebra, vol. **212**, p. 197-203 ; 2008
- [Hod] W. Hodges ; *Model Theory ; Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. **42**, Cambridge University Press ; 1993
- [KMO] S. Kuhlmann, M. Marshall, K. Osiak ; *Cyclic 2-Structures and Spaces of Orderings of Power Series Fields in Two Variables* ; Journal of Algebra, no. **335**, p. 36-48 ; 2011
- [KS] M. Knebusch, W. Scharlau ; *Algebraic Theory of Quadratic Forms (Generics Methods and Pfister Forms)* ; DMV Seminar **1** ; Birkhauser, Boston ; 1980
- [Lam1] T.Y. Lam ; *The Algebraic Theory of Quadratic Forms* ; W. A. Benjamin, Mass. ; 1973
- [Lam2] ——— ; *Orderings, Valuations and Quadratic Forms* ; AMS, Providence ; 1983
- [Lam3] ——— ; *Introduction to Quadratic Forms over Fields (Réédition)* ; Graduate Studies in Mathematics, vol. **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI ; 2005
- [Lir] A. Lira de Lima ; *Les Groupes Speciaux* ; Ph. D. Thesis, Université Paris VII ; 1996
- [Mar1] M. Marshall ; *Classification of Finite Spaces of Orderings* ; Canad. J. Math., no. **31**, p. 320-330 ; 1979
- [Mar2] ——— ; *Quotients and Inverse Limits of Spaces of Orderings* ; Canad. J. Math., no. **31**, p. 604-616 ; 1979
- [Mar3] ——— ; *The Witt Ring of a Space of Orderings* ; Transactions of AMS, no. **298**, p. 505-521 ; 1980
- [Mar4] ——— ; *Spaces of Orderings IV* ; Canad. J. Math., no. **32**, p. 603-627 ; 1980
- [Mar5] ——— ; *Abstract Witt Rings* ; Queen's Paper on Pure and Appl. Math., vol. **57**, Kingston ; 1980
- [Mar6] ——— ; *Spaces of Orderings : Systems of Quadratic Forms, Local Structure and Saturation* ; Comm. in Algebra, no. **12**, p. 723-743 ; 1984
- [Mar7] ——— ; *Separating Families for Semi-Algebraic Sets* ; Manuscripta. Math., vol. **80**, p. 73-79 ; 1993
- [Mar8] ——— ; *Minimal Generation of Basic Sets in the Real Spectrum of a Commutative Ring* ; AMS Contemporary Math., no. **155**, p. 207-219 ; 1994
- [Mar9] ——— ; *On Bröcker's t -Invariant and Separating Families for Constructible Sets* ; AMS Contemporary Math., no. **155**, p. 207-219 ; 1994
- [Mar10] ——— ; *An Axiomatic Description of the Real Spectrum of a Ring* ; Aequationes Math., vol. **48**, p. 306-316 ; 1994
- [Mar11] ——— ; *Spaces of Orderings and Abstract Real Spectra* ; Lecture Notes in Mathematics, vol. **1636** ; Springer ; 1996

- [Mar12] ———; *Open Questions in the Theory of Spaces of Orderings*; Journal of Symbolic Logic, vol. **67**, p. 341-352; 2002
- [Mar13] ———; *A Note Concerning the Curve $x^2 + y^2 = 3$* ; Pre-print version; 2003
- [Mar14] ———; *Local-Global Properties of Positive-Primitive Formulas in the Theory of Spaces of Orderings*; Journal of Symbolic Logic, vol. **71**, p. 1097-1107; 2006
- [Mar15] ———; *Positive Polynomials and Sums of Squares*; Mathematical Surveys and Monographs, AMS, vol. **146**; 2008
- [Meg] N. Megiddo; *Partial and Complete Cyclic Orders*; Bulletin of the AMS, vol. **82**, no **2**; Mars 1976
- [Pey] F. Peyrard; *Les Eléments de Géométrie d'Euclide*; Bibliothèque de l'Ecole Polytechnique, Distribution : F. LOUIS (Paris); An XII - 1804
- [Ray1] F.J. Rayner; *Relatively Complete Fields*; Proceedings of the Edinburgh Math. Soc., vol. **2**, no. **11**, p. 131-133; 1958
- [Ray2] ———; *An Algebraically Closed Field*; Glasgow Mathematical Journal, vol. **9**, p. 146-151; 1967-1968
- [Ray3] ———; *Algebraically Closed Fields Analogous to Fields of Puiseux series*; Journal of London Math. Soc., vol. **8**, no. **2**, p. 504-506; 1974
- [Rob] A. Robinson; *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*; Studies in Logic and The Foundations of Mathematics, Amsterdam : North-Holland; 1963
- [Rui1] J.M. Ruiz; *A Note on a Separation Problem*; Arch. Math., vol. **43**, p. 422-426; 1984
- [Ser1] ———; *Extensions de Corps Ordonnés*; Comptes rendus de 19/09/1949 des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. **229**, p. 576-577; 1949
- [Ser2] J.P. Serre; *Corps Locaux*; Editions Hermann, Publications de l'Université de Nancago, 4e édition; 1997